textos universitarios

Lógica: El pensamiento matemático

Diana Donají Del Callejo-Canal
Enrique Del Callejo-Canal
Margarita Edith Canal-Martínez

Universidad Veracruzana
Dirección Editorial

Lógica: El pensamiento matemático

Universidad Veracruzana

textos universitarios

Lógica: El pensamiento matemático

Diana Donají Del Callejo-Canal
Enrique Del Callejo-Canal
Margarita Edith Canal-Martínez

Universidad Veracruzana
Dirección Editorial
2016

Diseño de colección: Enriqueta del Rosario López Andrade
Diseño de portada: Diana D. Del Callejo-Canal; Enrique Del Callejo-Canal
y Margarita E. Canal-Martínez.

Clasificación LC:	BC135 C34 2016
Clasif. Dewey:	160
Autor:	Callejo Canal , Diana Donají del.
Título:	Lógica : el pensamiento matemático / Diana Donají del Callejo Canal, Enrique del Callejo Canal, Margarita Edith Canal Martínez .
Edición:	Primera edición.
Pie de imprenta:	Xalapa, Veracruz : Universidad Veracruzana, Dirección Editorial, 2016.
Descripción física:	95 páginas : ilustraciones ; 23 cm.
Serie:	(Textos universitarios)
Nota:	Bibliografía: página 95.
ISBN:	9786075024790
Materia:	Lógica simbólica y matemática.
Autores relacionados:	Callejo Canal, Enrique del. Canal Martínez, Margarita Edith.

Este libro se realizó con el apoyo del PIFI 2013

Primera edición, 29 de agosto de 2016

Dirección Editorial
Hidalgo 9, Centro, Xalapa, Veracruz
Apartado postal 97, CP 91000
diredit@uv.mx
Tel/fax (228) 818 59 80; 818 13 88

ISBN: 978-607-502-479-0

Impreso y hecho en México
Printed in Mexico

Contenido

Introducción

… Cada sujeto es responsable de su proceso de aprendizaje.
Nadie puede aprender por ti, de eso solo tú eres responsable.
No esperes que alguien te guíe, eso es una elección personal, tú decides el camino.
Diana Del Callejo-Canal, 2014.

Esta obra se deriva de la necesidad de enriquecer las referencias bibliográficas de los Programas Educativos (PE) relacionados con las ciencias computacionales y las matemáticas, entre otras disciplinas. Concebida durante la práctica docente en la Facultad de Estadística e Informática de la Universidad Veracruzana, está destinada para ser utilizada en diversos programas educativos tanto de la misma institución como de otras más que consideren a la Lógica dentro de su plan de estudios y sus áreas de formación.

El grupo de trabajo[1] responsable del presente texto es consciente, dentro de la práctica de los ejercicios, del interés y el gusto de los lectores por encontrar procesos lúdicos para comprender y aplicar el análisis y el razonamiento que proporciona la lógica a través del lenguaje matemático. Un lenguaje por medio de símbolos, equivalencias y criterios verdaderos, etcétera.

La mayoría de los estudiantes, al adentrarse al mundo de la lógica, considera su aprendizaje difícil, complicado o aburrido. Nada más alejado de la realidad. Ubiquémonos en el mundo cotidiano. Constantemente observamos, pensamos, relacionamos, intercambiamos información y conocimientos, descubrimos interrelaciones entre los saberes y lo real, compartimos y socializamos.

[1] Diana Donají Del Callejo-Canal y Margarita Edith-Canal Martínez integrantes del Instituto de Investigaciones de Estudios Superiores Económicos y Sociales (IIESES) y Enrique Del Callejo-Canal, estudiante del Doctorado en Ciencias e Ingeniería de la Computación de la Universidad Nacional Autonoma de México (UNAM), impartimos distintas experiencias educativas (EE´s) en la facultad de Estadística e Informática a nivel licenciatura y posgrado.

Asimismo y generalmente, sin distinguir de manera objetiva, construimos argumentos, premisas, proposiciones, establecemos diferentes conexiones entre ellas, derivamos conclusiones, deducimos, inferimos, etc. Si bien en esta construcción empírica no utilizamos ningún lenguaje matemático, sí se trata de un proceso razonado, ordenado y donde de manera informal aplicamos la lógica.[2]

Vista de una manera formal, la lógica, como un proceso ordenado y a través del lenguaje matemático, se ocupa del estudio de los métodos y de los razonamientos útiles, para constituirse en la base de un lenguaje analítico que permita concretar una fuente posible de modelos lógicos aplicables a la computación.

En un nivel elemental, la lógica nos proporciona un conjunto de reglas y de técnicas instrumentales para precisar si es o no válido un argumento dado dentro de un determinado sistema formal. En un nivel superior, la lógica matemática permite la posibilidad de axiomatizar las teorías matemáticas, de distinguir y de precisar su cualidad simbólica y, asimismo, se convierte en el sustento para desarrollar métodos computacionales útiles en sistemas formales.[3]

Por lo anterior, estimado lector, comprenderá a la lógica matemática como la ciencia que estudia los sistemas formales relacionados con la codificación de las nociones intuitivas de objetos matemáticos, de números, de símbolos, de lenguajes, de demostraciones, lo que la convierte en una herramienta de suma utilidad para la computación.

¿En qué áreas y experiencias educativas (EE) se recurre a la lógica matemática dentro de algún programa formativo relacionado con la computación?

Veamos algunos ejemplos:

a) Programación lógica. Su relación se observa en las EE de Programación avanzada y Programación de sistemas (áreas de iniciación de la disciplina y formación disciplinaria).

[2] En este sentido, cuando nos damos cuenta de ello, podemos relacionar dicha experiencia vital con la formalidad que otorga la lógica. De esta manera, al percibirlo seremos capaces de definir nuestras propias estrategias de aprendizaje para comprender el proceso que nos proporciona dicha ciencia. Y así podremos experimentar el gozo intelectual del que nos habla Wagensberg (2007), que sucede cuando comprendemos, descubrimos, construimos y reconstruimos lo que vamos conociendo y aprendiendo.

[3] Recordemos que la descripción de procedimientos de manera exacta y precisa da cuerpo a la formalización. Se busca que todos los pasos y las reglas empleadas en algún procedimiento estén explícitos y absolutamente especificados.

b) Análisis y optimización (de recursos temporales y espaciales) de algoritmos. Se relaciona con la EE de Algoritmos y estructura de datos I y II (áreas de iniciación de la disciplina y la formación disciplinaria).
c) Teoría de bases de datos relacionales. Se observa su relación con las EE de Base de datos I y II (área de formación disciplinaria).
d) Inteligencia artificial. Su relación tiene que ver con la EE de Inteligencia artificial (área de formación disciplinaria).

Sin embargo, su utilidad no solamente se limita al área de la computación; en general, la lógica tiene diversas aplicaciones en numerosas áreas y EE que tienen correspondencia con el razonamiento y el lenguaje matemático.

La obra se conforma de cuatros capítulos. El primero expone las nociones fundamentales de la lógica a fin de que los estudiantes se familiaricen con la comprensión de algunos elementos. El segundo aborda los aspectos principales de la lógica proposicional. El tercero muestra los elementos de la lógica de primer orden o lógica de predicados; y el cuarto las técnicas de demostración de teoremas o métodos de prueba, para terminar con las conclusiones en el último apartado.

1
Nociones fundamentales

Sin bien esta obra, como se menciona en párrafos anteriores, se elaboró en función del programa educativo de Informática de la Facultad de Estadística e Informática de la Universidad Veracruzana, abarca a otras áreas afines, constituyéndose en un apoyo fundamental de programas y experiencias educativas relacionadas con la lógica, misma que representa una herramienta de gran utilidad para el desarrollo del pensamiento y el razonamiento de los estudiantes. A continuación algunas nociones para la comprensión de la importancia y la utilidad que proporciona la lógica.

1. 1 Objeto de estudio de la lógica

La lógica no es una alternativa por la que podamos optar; no podemos decidir si vamos a emplearla o no. Resulta inevitable y está presente en cada frase que pronunciamos, ya que continuamente estamos enunciando proposiciones lógicas. Cuando decimos, por ejemplo, que algo es necesario, que una cosa depende de otra, que un evento es causa de otro, cuando indicamos una contradicción o una imposibilidad, una implicación o una dependencia, estamos haciendo lógica, aunque no seamos conscientes de ello.

Zuleta, citado por Bustamante, 2009: 4.

La lógica es el estudio de los métodos y los principios indispensables para distinguir el razonamiento correcto del razonamiento incorrecto. Los métodos y las técnicas de la lógica han sido desarrollados esencialmente con el propósito de aclarar esta distinción (Copi, 1972).

Además, se erige como la herramienta formal de razonamiento de la mayor parte de las experiencias educativas de licenciaturas relacionadas con la computación, sobre todo de las que están más concernidas con las matemáticas y la programación (Fernández *et al.*, 2007). Sin embargo, la lógica matemática no solo funciona para el cálculo de valores de verdad o la demostración de teoremas, sino también para tener consciencia de los procesos internos del pensamiento y con ello organizar ideas, sistematizar procesos, incluso para explicar algo con claridad.

Fernández apunta que:

> En cuanto a la inteligencia artificial, la lógica es el fundamento de todos los métodos de representación del conocimiento y del razonamiento, especialmente en sistemas expertos, razonamiento con incertidumbre (encadenamiento de reglas, lógica difusa), procesado del lenguaje natural, razonamiento espacial y temporal, visión artificial, robótica, lógica epistémica, etcétera (Fernández *et al*., 2007: 2).

Por tal motivo, es conveniente que los estudiantes relacionados con áreas de la computación valoren la práctica de la lógica como una aplicación en el mundo de la tecnología de las comunicaciones y que comprendan que el uso de un razonamiento ordenado puede ser de gran utilidad en muchos aspectos de la vida: académico, profesional y cotidiano.

1.2 Proposición

Para empezar, la lógica matemática está sustentada en el estudio de oraciones particulares a las que llamamos ***proposiciones***.

> Definición 1.1. Proposición: es una expresión o afirmación, la cual se puede calificar de dos maneras: verdadera o falsa (nunca ambas). En matemáticas generalmente se simboliza con una letra mayúscula de las últimas del alfabeto.

Ejemplo 1: Proposición.

P: Hoy está lloviendo.
Q: Si te portas mal, entonces te castigaré.
R: 2+2=4

Todas estas proposiciones se pueden valorar como verdaderas o falsas.

1.3 Clasificación de proposiciones: simples y compuestas

> Definición 1.2. Proposiciones simples o atómicas: como su nombre lo indica, son oraciones simples que no contienen un conectivo lógico.

Ejemplo 1: Proposiciones simples.

P: Hoy es miércoles.
Q: Ayer hizo calor.
R: Soy estudiante de informática.

> Definición 1.3. Proposiciones compuestas o moleculares: es la composición de dos o más proposiciones simples unidas por un conectivo lógico.

Ejemplo 1: Proposiciones compuestas.

P: Hoy es miércoles <u>y</u> tengo tarea.
Q: Ayer hizo calor <u>o</u> hizo frío.
R: Yo <u>no</u> soy alumno de nivel bachillerato.
S: <u>Si</u> soy estudiante de informática, <u>entonces</u> tengo que estudiar lógica.
T: Si x+2=5, entonces x=3.

1.4 Conectivos lógicos

> Definición 1.4. Conectivo lógico: son las expresiones lingüísticas que conectan proposiciones: y; o; no; si… entonces…; solo si…, entonces...

Existen cinco conectivos lógicos:

a) *Negación*: es un conectivo lógico que utiliza la palabra "no", tradicionalmente se simboliza por ($\neg$), aunque puede encontrarse como (~) o (/).

Ejemplo 1: Negación.

P: Yo **no** soy alumno de nivel bachillerato.
Q: $x \neq 0$

b) *Disyunción*: es un conectivo lógico que hace uso de la letra "o"; tradicionalmente se simboliza por ($\vee$), puede también encontrarse como ($\cup$).

Ejemplo 2: Disyunción.

P: Ayer hizo calor **o** hizo frío.
Q: x=0 o x=2

Note que al utilizar la expresión **o** significa que hay una elección: o sucede que ayer hizo calor, o sucede que hizo frío, con que una de ellas ocurra es suficiente.

c) Conjunción: es un conectivo lógico que utiliza la letra "y"; tradicionalmente se simboliza por (∧), puede también encontrarse como (•) o (∩).

Ejemplo 3: Conjunción.

P: Hoy es miércoles **y** tengo tarea.
Q: $x=5$ y $z=7$

Note que la expresión **y** significa que ambas cosas suceden al mismo tiempo. A diferencia de la **o** donde solo ocurre una o la otra.

d) Implicación o condicional: se presenta por la expresión "si..., entonces..."; tradicionalmente se simboliza por (→); a veces se omite el entonces de manera escrita, pero se sobreentiende.

Ejemplo 4: Implicación.

P_1: **Si** soy estudiante de informática, **entonces** tengo que estudiar lógica.
P_2: Soy estudiante de informática, tengo que estudiar lógica.
P_3: Como soy estudiante de informática, tengo que estudiar lógica.
P_4: Dado que soy estudiante de informática, tengo que estudiar lógica.
P_5: Estudio lógica porque soy estudiante de informática.
Q_1: Si $x=0$, entonces $x+2=2$.
Q_2: Dado que $x=0$, $x+2=2$.
Q_3: $x+2=2$, porque $x=0$.

Nota: En el lenguaje cotidiano la implicación no siempre tiene la forma "si… entonces…" como es el caso de los ejemplos P_2, P_3, P_4, P_5; sin embargo, al hacer la reflexión te darás cuenta de que cualquiera de ellas es equivalente al enunciado de la proposición P_1.

Lo que se encuentra posterior al "si" se conoce como *antecedente* (soy estudiante de informática) y lo que se dice después del "entonces" se conoce como *consecuente* (tengo que estudiar lógica). Si el antecedente se cumple, entonces el consecuente también. **No sucede al revés, si el consecuente se cumple, no se puede inferir que el antecedente también**.

Ejemplo 5: Implicación.

Antecedente: Soy estudiante de informática.
Consecuente: Tengo que estudiar lógica.

Es verdad que si soy estudiante de informática tengo que estudiar lógica (el antecedente se cumple y, por lo tanto, el consecuente también), pero no es verdad que si tengo que estudiar lógica sea estudiante de informática (puedo ser estudiante de matemáticas o estadística o física o filosofía). **Esta relación es en un solo sentido**.

e) *Bicondicional*: se presenta por la expresión "solo si… entonces…" o la expresión "… si y solo si…", tradicionalmente se simboliza por ($\longleftrightarrow$); significa que en ambos sentidos se cumple la implicación.

Ejemplo 6: Bicondicional.

P: x+3=5, **si y solo si** x=2.

Significa que **si** x+3=5, **entonces** x=2 y que **si** x=2, **entonces** x+3=5. **La implicación es en ambas direcciones**.

Nota: La bicondicional son dos implicaciones ("en ida y vuelta"), de ahí su nombre.

1.5 Argumento

Definición 1.5. Argumento: es un conjunto de premisa(s) o suposiciones seguidas por una conclusión. Existen argumentos válidos e inválidos.

Una *premisa(s)* es una proposición simple o compuesta que se da por hecho dentro del argumento y a partir de la(s) cual(es) se deduce una conclusión.

Ejemplo 1: Argumento.

Premisa 1 (proposición compuesta que es un hecho)
P: **Solo si** obtengo más del 50% de asistencias de todo el curso, **entonces** tengo derecho al examen a título.

Premisa 2 (proposición compuesta que es un hecho)
Q: Tengo más del 50% de asistencias de todo el curso.

Consecuencia lógica (conclusión)
R: Tengo derecho al examen a título.

Un argumento resulta válido cuando de las premisas se puede deducir la conclusión. No importa si la conclusión es falsa, la validez de la argumentación no se encuentra en su valor de verdad, sino en su construcción.

Ejemplo 2: Argumentación válida.

Premisa 1
P: **Si** oprimo la tecla m, **entonces** en la pantalla se escribe la letra m.

Premisa 2
Q: Oprimo la tecla m.

Consecuencia lógica (conclusión)
R: En la pantalla se escribe la letra m.

Ejemplo 3: Argumentación inválida.

Premisa 1
P: Como estudiante de la Universidad Veracruzana tengo que asistir a clases para aprobar las experiencias educativas.

Premisa 2
Q: No voy a clases.

Consecuencia lógica (conclusión)
R: Apruebo las experiencias educativas con 10.

1.6 Verdad y validez

En lógica es importante distinguir las proposiciones de los razonamientos. Las proposiciones son enunciados afirmativos, los cuales pueden valorarse como **verdaderos** o **falsos**; mientras que los razonamientos son argumentos que pueden valorarse como **válidos** o **inválidos**.

La verdad o la falsedad solo pertenecen a las proposiciones, mientras que la validez o la invalidez solo pertenecen a los razonamientos.

Copi menciona que "Existe una conexión entre la validez e invalidez de un razonamiento y la verdad o falsedad de sus premisas y conclusión, pero esta conexión no es de ninguna manera simple" (1972: 34). Algunos razonamientos válidos contienen solamente proposiciones verdaderas; por ejemplo (Copi, 1972: 34):

Premisas
P: Todas las ballenas son mamíferos (proposición verdadera).
Q: Todos los mamíferos tienen pulmones (proposición verdadera).

Conclusión
R: Todas las ballenas tienen pulmones (proposición verdadera).

Razonamiento válido

"Pero un razonamiento puede contener exclusivamente proposiciones falsas, y no obstante ser válido" (Copi, 1972: 35):

Premisas
P: Todas las arañas tienen tres patas (proposición falsa).
Q: Todos los seres de tres patas tienen alas (proposición falsa).

Conclusión
R: Todas las arañas tienen alas (proposición falsa).

Razonamiento válido

Se observa que en este último ejemplo, aunque las premisas y las conclusiones son falsas, el argumento es válido debido a que efectivamente de las premisas se deduce la conclusión. Aun cuando el valor de verdad de las proposiciones sea falso.

Existen también razonamientos inválidos; por ejemplo:

Premisas
P: Si es domingo, entonces no hay clases (proposición verdadera).
Q: No hay clases hoy (suponga que la proposición es verdadera en este momento).

Conclusión
R: Es domingo (el hecho de que no haya clases no lo hace domingo, puede ser un lunes feriado o cualquier otra circunstancia).

Razonamiento inválido

Se observa que el razonamiento de este último ejemplo es inválido porque de las premisas no se deduce la conclusión y no porque las premisas sean falsas o verdaderas.

Ejercicios

1. Determinar si las siguientes proposiciones son simples o compuestas; si son compuestas, indicar el conectivo lógico que están ocupando.

R: Mi ropa se moja.
S: Solo si obtengo la calificación de 7 o más, en los dos parciales del curso de lógica, exentaré el ordinario.
P: Hoy está lloviendo y salgo a la calle sin paraguas ni impermeable.
T: No obtengo la calificación de 7 o más en los dos parciales.
U: No exentaré el ordinario.
Q: Si está lloviendo y salgo a la calle sin paraguas ni impermeable, entonces mi ropa se moja.

2. Con las proposiciones del ejercicio 1 generar dos argumentos, indique cuáles son las premisas y cuál es la consecuencia lógica.

3. Indicar si los siguientes argumentos son válidos o inválidos.

a) Premisas
Q: Si está lloviendo y salgo a la calle sin paraguas ni impermeable, entonces mi ropa se moja.
R: Mi ropa se moja.

Conclusión
P: Hoy está lloviendo y salgo a la calle sin paraguas ni impermeable.

b) Premisas
Q: Si está lloviendo y salgo a la calle sin paraguas ni impermeable, entonces mi ropa se moja.
P: Hoy está lloviendo y salgo a la calle sin paraguas ni impermeable.

Conclusión
R: Mi ropa se moja.

c) Premisas
S: Solo si obtengo la calificación de 7 o más en los dos parciales del curso de lógica exentaré el ordinario.
T: No obtengo la calificación de 7 o más en los dos parciales.

Conclusión
U: No exentaré el ordinario.

d) **Premisas**
S: Solo si obtengo la calificación de 7 o más en los dos parciales del curso de lógica exentaré el ordinario.
U: No exentaré el ordinario.

Conclusión
T: No obtengo la calificación de 7 o más en los dos parciales.

1.7 Deducción, inferencia y abducción

> Definición 1.6. Deducción: es un razonamiento de cuyas premisas se pretende obtener pruebas concluyentes para afirmar la verdad de su conclusión. Un razonamiento deductivo puede ser válido o inválido (Copi, 1972).

Ejemplo 1: Deducción.

Premisa 1
P: **Si** nací en 1980, **entonces** en el 2015 tengo 35 años.
(Es una proposición compuesta que utiliza el conectivo lógico "si, entonces", implicación).

Premisa 2
Q: Nací en 1980.
(Es una proposición simple que no utiliza ningún conectivo lógico).

Consecuencia lógica (conclusión)
R: En el 2015 tengo 35 años.
(Es una premisa simple que se deduce de las premisas P y Q).

> Definición 1.7. Inferencia: se refiere a aquellos razonamientos que no aspiran a demostrar la verdad de sus conclusiones como una derivación necesaria de sus premisas, sino que solamente afirman la probabilidad de ser verdaderas. Una inferencia es un razonamiento totalmente distinto a un razonamiento deductivo (Copi, 1972).

La mayoría de nuestras inferencias cotidianas las hacemos por algo que se conoce como analogía (comparación entre dos razones o conceptos).

Ejemplo 2: Inferencia.

1. Hecho: En un salón de 36 alumnos le pregunté a 10 de ellos si les gustaban las matemáticas, 9 de ellos contestaron que no.
   Infiero que a los alumnos de ese salón no les gustan las matemáticas.

2. Infiero que como he leído *El amor en los tiempos del cólera* y me ha gustado mucho, entonces *Cien años de soledad* también me gustará debido a que ambos son de Gabriel García Márquez (no lo sé de cierto, solo lo supongo por una experiencia previa).

> Definición 1.8. Abducción: tipo de razonamiento en el que a partir de la descripción de un fenómeno se ofrece una hipótesis que lo explica. En un lenguaje cotidiano podríamos llamarle conjetura.

Ejemplo 3: Abducción.

Hecho o conclusión: Tu novio o novia no contesta el teléfono.
Por abducción, algunas conjeturas que resultan:

a) Está con otra(o).
b) Olvidó su teléfono en casa.
c) Está en clase.
d) Está dormido(a).

Ejercicio

Con sus argumentos responda la siguiente pregunta: ¿cuál es la diferencia entre los razonamientos deductivo, inductivo y abductivo?

1.8 Falacia y ambigüedad

> Definición 1.9. Falacia: es un tipo de argumentación incorrecta, pero que a simple vista parece correcta.

Ejemplo 1: Falacia.

Premisas
P: Todos los perros son bonitos.
Q: Duque es bonito.

Conclusión

R: Duque es un perro.

Ahora bien, en cuanto modificamos el nombre del perro por el nombre de un niño la falacia se evidencia.

Ejemplo 2: Falacia.

Premisas
P: Todos los perros son bonitos.
Q: Luis es bonito.

Conclusión
R: Luis es un perro.

Es importante tener tiempo para analizar con detenimiento si la argumentación es válida o inválida, aunque a simple vista parezca correcta.

Hay muchas clasificaciones de falacias, sin embargo, no es objetivo de este libro estudiar todos los tipos de falacia. Si existe interés por conocer más acerca de este tema, encontrará todo un capítulo dedicado a las falacias en el libro de Irving M. Copi, *Introducción a la lógica*.

> Definición 1.10. Falacia de ambigüedad o falacia de claridad: estas falacias tienen la particularidad de que en la formulación del razonamiento aparecen palabras o frases ambiguas, cuyos resultados oscilan o cambian de manera más o menos sutil (Copi, 1972).

De acuerdo con dicho autor, la ambigüedad puede darse:

1. En la sintaxis: la forma de escribir correctamente el enunciado con base en reglas ortográficas, de puntuación o de estructura.

Ejemplo: No todos los informáticos están locos.
No, todos los informáticos están locos.

Como se observa, la inclusión de la coma modifica el sentido de la proposición.

2. En la semántica: cuando una palabra tiene uno o más significados.

Ejemplo: Han puesto un banco nuevo en la plaza.
Pepe vio a Pablo enfurecido.

En la primera, la palabra banco puede refiere tanto a una institución bancaria como a un asiento y, al no aclarar el término, se presta a ambigüedades que en lógica pueden concluir de diferente manera.

En la segunda, ¿quién estaba enfurecido, Pepe o Pablo? Nuevamente, no está claro quién está enfurecido, existe ambigüedad.

2
Lógica proposicional

La lógica proposicional o lógica de proposiciones está muy relacionada con el uso de conectivos lógicos (ver página 15) y con los valores de verdad (verdadero o falso).

La lógica proposicional no trata con variables de ningún tipo, solo con proposiciones (afirmaciones). Por ejemplo:

- Ahora está lloviendo.
- x+3=5

Se estudia por su simpleza y porque es la base de razonamientos lógicos más avanzados. La mayoría de los conceptos de la lógica proposicional forma parte de lo que se conoce como lógica de primer orden (Paulson, 2002).

2.1 Simbolización de proposiciones

1. Toda proposición simple debe simbolizarse ya sea con las letras mayúsculas P, Q, R,… del abecedario o con p_0, p_1, p_2, p_3. Cuando se sabe que el número de proposiciones es finito, se sugiere utilizar las letras mayúsculas del alfabeto P, Q, R, S, etc. Si no se sabe cuántas proposiciones se usarán y será un número grande, entonces se sugiere utilizar la notación p_1, p_2, p_3,.. p_n.

Ejemplo 1: Simbolización de proposición simple.

P: Hoy voy al cine.
Q: Hoy voy al teatro.
R: Hoy salgo de mi casa.

2. Las proposiciones compuestas que utilizan conectivos lógicos: conjunción, disyunción, implicación o doble implicación, se componen de la primera proposición simple, el conectivo lógico y la segunda proposición simple, así sucesivamente hasta completar la proposición compuesta con cuantos conectivos y proposiciones simples contenga.

Ejemplo 2: Simbolización de proposición compuesta.
Si hoy voy al cine **o** al teatro, **entonces** hoy salgo de mi casa.

$$(P \vee Q) \rightarrow R$$

3. Las proposiciones compuestas que utilizan el conectivo lógico de la negación se escriben de la siguiente manera: la negación y después la proposición simple.

Ejemplo 3: Simbolización de la negación.
Hoy **no** voy al cine.

$$\neg P$$

4. El conectivo lógico de la negación es el único que puede utilizarse uno tras otro sin la necesidad de colocar una premisa simple.
Ejemplo 4: Simbolización doble negación.

$$\neg\neg P$$

5. En una proposición compuesta, el uso de los paréntesis indica la operación que es prioritaria en la proposición.
Ejemplo 5: Uso de paréntesis.

$$(P \vee Q) \rightarrow R$$

Los paréntesis indican que la operación predominante es la implicación y después la disyunción. (Nota: para resolver los ejercicios es necesario iniciar por las operaciones más débiles y llegar hasta la operación predominante).

El uso de paréntesis puede modificar profundamente una proposición; por ejemplo, no es lo mismo escribir:

$$(\neg P \rightarrow \neg R)$$

Que en este caso se lee como: Si no voy al cine entonces no salgo de mi casa.
A escribir:

$$\neg(P \rightarrow \neg R)$$

Que en este caso se lee como: No es verdad que si voy al cine, entonces no salgo de mi casa.

Nota: Regularmente los símbolos predominantes en las proposiciones compuestas son la implicación y la doble implicación, de ahí sigue la conjunción y después la disyunción; el conectivo de la negación es el menos fuerte de todos.

Así, los conectivos lógicos conjunción, disyunción, implicación o doble implicación requieren estar acompañados de dos o más proposiciones simples y el conectivo lógico negación siempre va antes de una proposición simple o compuesta.

Sobre la notación de los conectivos lógicos cabe destacar que no hay una forma única de simbolizarlos, razón por la cual se comparte la tabla 1 con la finalidad de que se conozcan las distintas notaciones para simbolizarlos.

Tabla 1. Simbolización de los conectivos lógicos

Conectivo lógico	Interpretación	Símbolo	Otros símbolos	Tipo de conectivo
Negación	No	$\neg$	$\sim$	Monario
Disyunción	O	$\vee$	$\cup$	Binario
Conjunción	Y	$\wedge$	$\cap$ & •	Binario
Implicación o condicional	"Si, entonces"	$\rightarrow$	$\Rightarrow$ $\supset$	Binario
Doble implicación o bicondicional	"Si y solo si"	$\leftrightarrow$	$\equiv$ $\Leftrightarrow$	Binario

Ejercicio

Determinar si las siguientes proposiciones están permitidas en la gramática formal de la lógica de proposiciones.

1) $\neg Q \rightarrow \neg R$
2) $P \vee R$
3) $P \neg Q$
4) $\neg\neg\neg Q$
5) $\vee R$
6) $Q \rightarrow \neg R$
7) $Q \rightarrow \vee R$
8) $Q \rightarrow R$
9) $P \vee\vee R$
10) $P \vee R \rightarrow \neg R$

2.2 Formalización del lenguaje natural al leguaje de la lógica proposicional

Como se ha explicado repetidamente a lo largo de este texto, las proposiciones son oraciones afirmativas construidas todo el tiempo. Se dividen en simples (una única oración afirmativa) y compuestas (una o más proposiciones simples, unidas por un conectivo lógico).

De manera constante hablamos construyendo proposiciones simples y compuestas, sin saber formalmente que así se llaman. Para propósitos de la lógica proposicional es necesario utilizar un lenguaje matemático que ayude a un entendimiento universal de las proposiciones que se construyen.

Así, cualquier proposición puede ser "traducida" a un lenguaje formal matemático. Para hacer esta traducción se requiere llevar a cabo los siguientes pasos:

1. Identificar si lo que queremos formalizar es una proposición simple o compuesta.
2. Si es una proposición simple, asignarle una letra mayúscula del abecedario.
3. Si es una proposición compuesta:

- Identificar cuáles son las proposiciones simples que la componen y asignar a cada proposición simple una letra del abecedario.
- Identificar los conectivos lógicos.
- Identificar el conectivo lógico que predomina en la proposición.

Ejemplo 1: Simbolización de proposiciones.

a) Mi coche avanza.
b) Enciendo mi coche y oprimo el acelerador.
c) **Si** enciendo mi coche y oprimo el acelerador, **entonces** mi coche avanza.

Se formaliza de la siguiente manera:

- El primer enunciado es una premisa simple y se le asigna la letra P.

P: Mi coche avanza.

- El segundo enunciado es una proposición compuesta que utiliza dos proposiciones simples y el conectivo lógico conjunción ("y"). Así que a las proposiciones se les asignan letras del abecedario y a la P ya no se le puede ocupar porque ya se le asignó una oración.

Q: Enciendo mi coche.

R: Oprimo el acelerador.

El conectivo lógico "y" se simboliza como $\wedge$, entonces mi segundo enunciado se simboliza de la siguiente manera:

$$Q \wedge R$$

- El tercer enunciado es una proposición compuesta que utiliza tres proposiciones simples y dos conectivos lógicos:

$$\textbf{Si}\ \overbrace{\text{enciendo mi coche}}^{\text{Premisa simple 1}}\ \text{y}\ \overbrace{\text{oprimo el acelerador}}^{\text{Premisa simple 2}},\ \textbf{entonces}\ \underbrace{\text{mi coche avanza}}_{\text{Premisa simple 3}}$$

- A la primera proposición simple ya se le asignó la letra Q.

Q: Enciendo mi coche.

- A la segunda proposición ya se le asignó la letra R.

R: Oprimo el acelerador.

- A la tercera proposición ya se le asignó la letra P.

P: Mi coche avanza.

El conectivo lógico "Si, entonces" se simboliza: $\rightarrow$
El conectivo lógico "y" se simboliza: $\wedge$, entonces el tercer enunciado en símbolos matemáticos se simboliza de la siguiente manera:

$$(Q \wedge R) \rightarrow P$$

Es importante conocer que las proposiciones no tienen que ser solamente oraciones en español, sino que también hay proposiciones que son expresiones matemáticas; por ejemplo:

$$x=3$$

Estas proposiciones funcionan y se simbolizan exactamente igual que las oraciones en lenguaje español.

$$\text{Si } x=3, \text{ entonces } x+2=5$$

Sería una proposición compuesta por dos proposiciones simples y un conectivo lógico "si, entonces"

P: $x=3$
Q: $x+2=5$

Y la simbolización de esta proposición sería:

$$P \rightarrow Q$$

Ejercicios

1. Traducir las siguientes oraciones a un lenguaje formal matemático.

1) Ella estudia o trabaja.
2) Si ella estudia, entonces no gana dinero.
3) Si ella trabaja, entonces gana dinero.
4) Si gana dinero, puede comprarse una televisión y ver una serie.
5) Solo si ve la serie, entonces conoce a los personajes.
6) $x=2$ o $x=8$
7) Si y solo si $x=2$, entonces $x+5=7$
8) Si $x=2$, entonces $x\neq8$
9) $x=8$ y $y=5$
10) $x\neq8$ y $y\neq5$

2. Traducir las siguientes proposiciones de un lenguaje formal matemático a un lenguaje natural.

P: Él estudia informática.
Q: A él le gustan las computadoras.
R: A él le gusta la experiencia educativa de lógica.
S: $x=7$
T: $x=6$
U: $x+2=9$
V: $x+2=8$

1) $P\rightarrow(Q\wedge R)$
2) $\neg(P\rightarrow(Q\wedge R))$
3) $(S\vee T)\rightarrow(U\vee V)$
4) $S\leftrightarrow U$
5) $S\leftrightarrow V$
6) $V\leftrightarrow T$

2.3 Tablas de verdad

"Las tablas de verdad son, por una parte, uno de los métodos más sencillos y conocidos de la lógica formal, pero al mismo tiempo también uno de los más poderosos y claros. Entender bien las tablas de verdad es, en gran medida, entender bien a la lógica formal misma" (Barceló, 2012: 1).

Una tabla de verdad muestra el valor de verdad de una proposición compuesta. Así como lo explica el principio de bivalencia: una proposición puede ser verdadera o falsa únicamente, nunca ambas.

El valor verdadero se representa por una "V" o un "1" o "$\top$"

El valor falso se representa por una "F" o un "0" o "$\perp$"

Existe una tabla de verdad para cada uno de los conectivos lógicos, las cuales se presentan a continuación. Lo que se tiene que evaluar para responder si una proposición compuesta es verdadera o falsa es el estatus actual de las proposiciones simples.

Ejemplo 1: Valoración de proposiciones.

P: Hoy está lloviendo.

(Esta proposición resulta verdadera si hoy está lloviendo, pero resulta falsa cuando no está lloviendo).

1) Negación (NO)

P	¬P
V	F
F	V

O bien

P	¬P
1	0
0	1

2) Disyunción (O)

P	Q	$P \vee Q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

O bien

P	Q	$P \vee Q$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

3) Conjunción (Y)

P	Q	$P \wedge Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

O bien

P	Q	$P \wedge Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

4) Implicación o condicional (SI..., ENTONCES...)

P	Q	$P \rightarrow Q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

O bien

P	Q	$P \rightarrow Q$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

5) Doble implicación o bicondicional (SI Y SOLO SI)

P	*Q*	*P↔Q*
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

O bien

P	*Q*	*P↔Q*
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	1

Se puede establecer el valor de verdad de cualquier proposición compuesta conociendo las tablas de verdad de los conectivos lógicos. Así, la valoración de la proposición compuesta:

$$(R \wedge Q) \rightarrow P$$

Se construye introduciendo una columna por cada proposición simple, después una columna para la proposición compuesta del paréntesis y posteriormente una para la proposición compuesta completa.

Para calcular el número de renglones se hace la operación 2^k, donde k es el número de proposiciones simples; en el caso del ejemplo son 3 proposiciones simples y la operación $2^3=8$, así la tabla de verdad tendrá 5 columnas y 8 renglones.

R	*Q*	*P*	**(R∧Q)**	**(R∧Q)→P**
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

PRIMER PASO: Acomodar los valores de verdad de las premisas simples. En la primera premisa simple, cuatro verdaderos, cuatro falsos; en la segunda premisa simple, dos verdaderos, dos falsos; en la tercera premisa simple, uno verdadero, uno falso.

SEGUNDO PASO: Valorar la premisa compuesta que está entre paréntesis. En este ejemplo dicha premisa solo ocupa las dos premisas simples acomodadas en las columnas 1 y 2; así que solo los valores de las premisas R y Q son los valores que se toman en cuenta (iluminados en gris claro).

TERCER PASO: Considerar los valores de verdad de la premisa compuesta ($R \wedge Q$) como si fuera una premisa simple y los valores de verdad de P, de acuerdo con la tabla de la implicación.

El resultado es que la proposición compuesta $(R \wedge Q) \rightarrow P$ resulta falsa, cuando P es falsa y Q y R verdaderas.

> Definición 2.1. Tautología: es una proposición compuesta que resulta siempre verdadera, cualesquiera que sean los valores de verdad de las proposiciones simples. La construcción de tablas de verdad es uno de los métodos más efectivos para determinar si una fórmula o proposición compuesta es o no una tautología.

Detectar que una proposición es una tautología puede servir para usarla como una fórmula, donde no importa el valor de verdad de las proposiciones simples que las componen; siempre el resultado de esa fórmula será verdadero.

Ejemplo 2: Tautología.

$$P \vee \neg P$$

Su tabla de verdad resulta de la siguiente manera:

P	$\neg P$	$P \vee \neg P$
1	0	1
0	1	1

Dado que los valores de verdad finales para la proposición compuesta son todos verdaderos, entonces podemos afirmar que $P \vee \neg P$ es una tautología.

Esta situación resulta bastante lógica cuando le damos a la proposición P una oración; por ejemplo:

P: Voy al cine.
$\neg$P: No voy al cine.

Y decir que voy al cine o no voy al cine es una proposición tautológica.

> Definición 2.2. Contradicción: es una proposición compuesta que resulta siempre falsa, cualesquiera que sean los valores de verdad de las proposiciones simples. Es lo contrario a la tautología.

Ejemplo 3: Contradicción.

$$P \wedge \neg P$$

Su tabla de verdad resulta de la siguiente manera:

P	⌐P	P∧⌐P
1	0	0
0	1	0

Dado que los valores de verdad finales para la proposición compuesta son todos falsos, entonces podemos afirmar que P∧⌐P es una contradicción.

Esta situación resulta bastante lógica cuando le damos a la proposición P una oración; por ejemplo:

P: Voy al cine.
⌐P: No voy al cine.

Y decir que voy al cine y no voy al cine es una contradicción.

Definición 2.3. Indeterminación: se dice que existe una indeterminación cuando en los valores finales de la tabla de verdad encontramos verdaderos y falsos.

(Satisfacibilidad): se dice que un enunciado o proposición es satisfacible cuando existe al menos una combinación de valores de verdad que lo hace verdadero.

"Coloquialmente, basta que exista una línea (al menos) donde se satisfaga (simultáneamente) ese conjunto de fórmulas, para afirmar que es satisfacible. Si un conjunto (o una fórmula) no es satisfacible se denominará insatisfacible. Las fórmulas insatisfacibles también se denominan contradicciones" (Fernández *et al.*, 2007: 27).

Ejemplo 4: Sistema satisfacible.

R	***Q***	***P***	**(R∧Q)**	**(R∧Q)→P**
1	1	1	1	1
1	1	0	1	0
1	0	1	0	1
1	0	0	0	1
0	1	1	0	1
0	1	0	0	1
0	0	1	0	1
0	0	0	0	1

La proposición $(R \wedge Q) \rightarrow P$ es satisfacible, dado que su tabla de verdad contiene al menos, un resultado verdadero.

Ejercicios

1. Calcular las tablas de verdad para las siguientes proposiciones y determinar si es una tautología, una contradicción o si es satisfacible.

1) $[(P \rightarrow Q) \wedge Q] \rightarrow Q$
2) $(P \rightarrow Q) \vee (P \leftrightarrow Q)$
3) $(P \rightarrow Q) \wedge (P \wedge \neg Q)$
4) $(P \wedge Q) \rightarrow P$
5) $P \vee (Q \rightarrow R)$
6) $(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
7) $[(P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow R)] \rightarrow (P \rightarrow R)$
8) $(P \rightarrow Q) \wedge (\neg P \rightarrow \neg Q)$
9) $P \rightarrow (Q \rightarrow R)$
10) $\neg(P \vee Q) \leftrightarrow (\neg P \wedge \neg Q)$
11) $\neg(P \wedge Q) \leftrightarrow (\neg P \vee \neg Q)$

Definición 2.4. Equivalencia lógica: cuando una bicondicional es una tautología, se dice que es una equivalencia lógica.

Una proposición P es equivalente a otra Q cuando las tablas de verdad de P y Q son iguales. Se denota por el símbolo ($\equiv$) o ($\Leftrightarrow$) o ($\longleftrightarrow$).

Las equivalencias lógicas por definición más comúnmente utilizada son:

1) $P \rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q)$
2) $(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$
3) $\neg(\neg P) \equiv P$

Además de estas equivalencias, hay algunas leyes en lógica proposicional que tienen que ver con las equivalencias lógicas:

Nombre	Disyunción	Conjunción
Idempotencia	$P \vee P \equiv P$	$P \wedge P \equiv P$
Conmutativa	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociativa	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Absorción	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Distributiva	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Leyes de De Morgan	$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Identidad	$P \equiv P$	

Una de las formas de probar una equivalencia lógica es a través de las tablas de verdad. Si la tabla de verdad de la proposición antes del símbolo de equivalencia es igual a la tabla de verdad de la proposición que está después del símbolo de equivalencia, entonces son una equivalencia lógica.

Ejemplo 5: Equivalencia lógica.

Probar que $\neg(\neg P) \equiv P$ (ley de doble negación)

P	¬P	¬(¬P)
1	0	1
0	1	0

Como se observa, los valores de verdad de P y doble negación de P son los mismos, por lo que se puede decir que es una equivalencia lógica.

Las equivalencias lógicas sirven en muchos casos para simplificar expresiones.

Ejemplo 6: Simplificación de proposiciones.

Para simplificar la proposición:

$$(R \vee S) \wedge (R \vee S \vee T)$$

1) Aplicar la ley asociativa en $(R \vee S \vee T)$; queda $(R \vee S) \vee T$
2) La proposición queda de la siguiente manera $(R \vee S) \wedge (R \vee S) \vee T$
3) Aplicar idempotencia con $(R \vee S) \wedge (R \vee S)$; queda $(R \vee S)$
4) La expresión simplificada resulta $(R \vee S) \vee T$
5) Aplicar la ley asociativa y la expresión simplificada; queda $R \vee S \vee T$

Entonces $(R \vee S) \wedge (R \vee S \vee T) \equiv R \vee S \vee T$

Ejercicios

1. Utilice las tablas de verdad para probar las siguientes equivalencias:

1) $P \rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q)$
2) $(P \leftrightarrow Q) \equiv P \rightarrow Q \wedge Q \rightarrow P$

2. Simplifique las siguientes expresiones:

a) $(P \wedge Q \wedge R) \vee (P \wedge \neg Q \wedge R)$
b) $S \wedge P \vee Q \vee (\neg\neg Q \wedge S)$
c) $\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$

3. Utilice la tablas de verdad para probar las leyes de Idempotencia, Conmutativa, Asociativa, Absorción, Distributiva, Leyes de De Morgan, para la disyunción.

2.4 Reglas de inferencia

Las reglas de inferencia sirven para *deducir conclusiones* lógicas a partir de *premisas*. La conclusión en este sentido es una consecuencia lógica de las premisas. Si cada paso que se da para llegar a esa consecuencia lógica se encuentra permitido por una de las doce reglas de inferencia, entonces habremos hecho un ejercicio de *deducción*.

2.4.1 *Modus Ponendo Ponens* (PP)

Significa, afirmando el antecedente, afirmo el consecuente.

$P \rightarrow Q$	(Premisa)
P	(Premisa)

$\therefore Q$	(Conclusión)

Ejemplo 1: *Ponendo Ponens*.

P=Llueve.
Q= El patio se moja.

Si llueve, entonces el patio se moja.	(Premisa)
Llueve.	(Premisa)

∴ El patio se moja.	(Conclusión)

Nota: Recordar que P y Q pueden ser una premisa simple o una premisa compuesta, en todo caso, si P se cumple, entonces se concluye Q.

Ejemplo 2: *Ponendo Ponens*.

P=Llueve.
Q= El patio se moja.

$\neg P \rightarrow \neg Q$	(Premisa)
$\neg P$	(Premisa)

$\therefore \neg Q$	(Conclusión)

Si no llueve, entonces el patio no se moja.	(Premisa)
No llueve.	(Premisa)

∴ El patio no se moja.	(Conclusión)

Nota: En las reglas de inferencia lo que tiene que respetarse es la forma; P puede ser una premisa simple o compuesta y Q puede ser una premisa simple o compuesta. No importa cuál sea el antecedente, si se afirma el antecedente se cumple el consecuente.

Ejemplo 3: *Ponendo Ponens*.

$(\neg P \vee R) \rightarrow \neg Q$	(Premisa)
$\neg P \vee R$	(Premisa)

$\therefore\ \neg Q$	(Conclusión)

Ejemplo 4: *Ponendo Ponens*.

$\neg(P \vee R) \rightarrow (\neg Q \vee Z)$	(Premisa)
$\neg(P \vee R)$	(Premisa)

$\therefore\ \neg Q \vee Z$	(Conclusión)

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 48.

1. "Utilizando *modus ponendo ponens*, obtener una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes. Escribir las conclusiones en la línea (3)".

1. (1) P V Q $\rightarrow$ R
   (2) P V Q
   (3)

2. (1) $\neg P \rightarrow \neg R$
   (2) $\neg P$
   (3)

3. (1) $\neg P$
   (2) $\neg P \rightarrow Q$
   (3)

4. (1) P $\rightarrow$ Q ^ R
   (2) P
   (3)

5. (1) $P \rightarrow Q \vee R$
   (2) P
   (3)

6. (1) $\neg R$
   (2) $\neg R \rightarrow Q \wedge P$
   (3)

Formalización de la escritura de una demostración

En una demostración se numeran los pasos a seguir, se indican cuáles son las premisas colocando una "P" al lado derecho de la proposición y se indica cuál es la conclusión a la que habrá que llegar poniendo una diagonal en la última premisa, seguida de $\therefore$ antes de la proposición. Posteriormente, se coloca la primera conclusión a la que se llega, ubicando en el lado derecho la regla de inferencia utilizada; en el caso de *Ponendo Ponens* se utiliza la expresión PP y el número de las premisas utilizadas para componer la regla.

Ejemplo 5: Formalización de una demostración.

1)	$\neg P \rightarrow \neg Q$	P
2)	$\neg P$	P / $\therefore \neg Q$
3)	**$\neg Q$**	**PP, 1,2**

Ejercicios resueltos

Los ejercicios son del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 1996: 48 y la solución de los mismos son de los autores de la presente obra, línea (3):

1. "Utilizar el *modus ponendo ponens* para deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de las premisas siguientes":

a. Si $x \neq 0$, entonces $x+y>1$, $x \neq 0$

1)	$x \neq 0 \rightarrow x+y>1$	P
2)	$x \neq 0$	P
3)	**$x+y>1$**	**PP, 1,2**

b. Si $x+y=z$ entonces $y+x=z$, $x+y=z$

1)	$x+y=z \rightarrow y+x=z$	P
2)	$x+y=z$	P
3)	**$y+x=z$**	**PP, 1,2**

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 48.

a. Si "x" es un número y "z" es un número, entonces $x+z$ es un número. "x" es un número y "z" es un número.
b. Si $x>y$ y $y>z$, entonces $x>z$. A la vez $x>y$ y $y>z$.

c. A la vez x=y y y=z. Si x=y y y=z, entonces x=z.

No existe limitación respecto al número de veces que se puede aplicar en una demostración la regla *modus ponendo ponens*. Los ejercicios que siguen requieren más de dos aplicaciones.

d. Demostrar la conclusión que se pide, expresando la regla aplicada para deducir cada línea e indicar la regla que se ha utilizado.

Ejemplo

1) Demostrar: $\neg N$

(1) $R \rightarrow \neg S$	P
(2) R	P
(3) $\neg S \rightarrow Q$	P
(4) $Q \rightarrow \neg N$	P
(5) $\neg S$	**PP, 1,2**
(6) Q	**PP,3,5**
(7) $\neg N$	**PP,4,6**

2) Demostrar: B

(1) $\neg G \rightarrow E$	P
(2) $E \rightarrow K$	P
(3) $\neg G$	P
(4) $K \rightarrow \neg L$	P
(5) $\neg L \rightarrow M$	P
(6) $M \rightarrow B$	P

3) Demostrar: R V S

(1) C V D	P
(2) C V D $\rightarrow \neg F$	P
(3) $\neg F \rightarrow A \wedge \neg B$	P
(4) $A \wedge \neg B \rightarrow$ R V S	P

2.4.2 *Modus Tollendo Tollens* (TT)

Significa: negando el antecedente, niego el consecuente.

$P \rightarrow Q$ (Premisa)
$\neg Q$ (Premisa)

$\therefore \neg P$ (Conclusión)

Ejemplo 1: *Tollendo Tollens*.

P=Llueve.
Q= El patio se moja.

Si llueve, entonces el patio se moja. (Premisa)
El patio no se moja. (Premisa)

∴ No llueve. (Conclusión)

Ejemplo 2: *Tollendo Tollens*.

Una ilustración de estas ideas en una deducción, utilizando proporciones matemáticas, es la siguiente. Se requiere demostrar que x=0, y se tienen tres premisas.

(1) $x \neq 0 \rightarrow x = y$	P	**(4) $x \neq y$**	**TT 2,3**
(2) $x = y \rightarrow x = z$	P	**(5) $x = 0$**	**TT 1,4**
(3) $x \neq z$	P		

Obsérvese que se obtiene la línea (5) de las líneas (1) y (4) puesto que "x=0" es la negación de "x≠0". En el caso de las igualdades matemáticas (=) su negación es la desigualdad (≠); casi siempre en matemáticas una "/" sobre otro símbolo implica que es lo contrario a ese símbolo, así $\not>$, significa no es mayor que.

Ejemplo 3: *Tollendo Tollens*.

a. (1) $R \rightarrow S$ P
(2) $\neg S$ P
(3) $\neg R$ TT 1,2

c. (1) $P \rightarrow \neg Q$ P
(2) $\neg\neg Q$ P
(3) $\neg P$ TT 1,2

b. (1) $Q \wedge R \rightarrow S$ P
(2) $\neg S$ P
(3) $\neg(Q \wedge R)$ TT 1,2

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 58.

1. "Deducir una conclusión de cada uno de los conjuntos de premisas siguientes, aplicando la regla del *modus tollendo tollens*". Escribir las conclusiones a partir de la línea (3).

1. (1) $Q \rightarrow R$ P
(2) $\neg R$ P
(3)

2. (1) $\neg P \rightarrow Q$ P
(2) $\neg Q$ P
(3)

3. (1) $R \rightarrow S$ P
(2) $\neg S$ P
(3)

4. (1) $Q \rightarrow \neg R$ P
(2) $\neg\neg R$ P
(3)

5. (1) P → Q ^ R P
(2) ¬(Q ^ R) P
(3)

6. (1) P V Q → R P
(2) ¬R P
(3)

Nota: Las reglas de inferencia aplican en cualquier tipo de proposición, lo cual se puede hacer cuantas veces sea necesario.

2.4.3 Doble negación (DN)

Significa: si niego algo dos veces entonces lo afirmo.

$$\neg\neg P \equiv P$$

Ejemplo 1: Doble negación.

P: Llueve.
¬¬P= No (no llueve).
Entonces llueve.

Nota: La negación en lógica debe entenderse como lo contrario a algo, de manera que si se tiene una premisa de la forma P, su negación será "no P" (¬P), y si se tiene una premisa de la forma "no P" (¬P), su negación será la afirmación de P.

Advertencia: Cuidado con el uso de paréntesis, la negación de P→Q será ¬(P→Q) y no ¬P→Q; utilizarlos puede modificar enteramente el enunciado original. Favor de poner mucha atención en ello.

La aplicación de las reglas de inferencia es ilimitado en el sentido de que no solo se pueden utilizar cuantas veces sea necesario, sino además se pueden combinar en una sola demostración.

Ejemplo 2: Demostración con reglas de inferencia combinadas (los ejercicios son del libro de Suppes, 2013: 58 y la demostración de los mismos son de los autores de la presente obra).

1. Demostrar: C
(1) ¬B P
(2) A → B P
(3) ¬A → C P
(4) ¬A TT,1,2
(5) C PP,3,4

2. Demostrar: F
(1) G → H P
(2) ¬G → ¬¬F P
(3) ¬H P
(4) ¬G TT, 1,3
(5) ¬¬F PP, 2,3
(6) F DN, 5

3. Demostrar: R ^ S
   (1) P → ¬Q   P
   (2) Q   P
   (3) ¬P → R ^ S   P
   (4) ¬P   TT,1,2
   (5) R ^ S   PP,3,4

4. Demostrar: E
   (1) F   P
   (2) ¬E → ¬F   P
   (3) NO SE PUEDE DEMOSTRAR

5. Demostrar: ¬S
   (1) S → ¬R   P
   (2) R   P
   (3) ¬S   TT,1,2

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 60-61.

Del inciso A

1. Demostrar: ¬P
   (1) P → ¬Q   P
   (2) Q   P

2. Demostrar: ¬A
   (1) A → ¬ C   P
   (2) B → C   P
   (3) B   P

3. Demostrar: P
   (1) ¬P → ¬Q   P
   (2) Q   P

4. Demostrar: A
   (1) ¬A → ¬B   P
   (2) ¬B → ¬C   P
   (3) C   P

5. Demostrar: ¬S
   (1) P → Q   P
   (2) Q → R   P
   (3) S → ¬R   P
   (4) P   P

6. Demostrar: ¬A
   (1) A → B   P
   (2) B → C   P
   (3) C → D   P
   (4) ¬D   P

Del inciso B

1. Demostrar: x=0
   (1) x≠0 → x+y≠y   P
   (2) x+y=y   P

2. Demostrar: x≠0
   (1) x=0 → x≠y   P
   (2) x=z → x=y   P
   (3) x=z   P

3. Demostrar: $x=y$
   (1) $x \neq y \rightarrow x \neq z$ P
   (2) $x \neq z \rightarrow x \neq 0$ P
   (3) $x=0$ P

4. Demostrar: $x \neq 0$
   (1) $x=y \rightarrow x=z$ P
   (2) $x=z \rightarrow x=1$ P
   (3) $x=0 \rightarrow x \neq 1$ P
   (4) $x=y$ P

5. Demostrar: $x \neq y$
   (1) $x=y \rightarrow y=z$ P
   (2) $y=z \rightarrow x=w$ P
   (3) $y=w \rightarrow y=1$ P
   (4) $y \neq 1$ P

6. Demostrar: $x=0$
   (1) $x \neq 0 \rightarrow y=1$ P
   (2) $x=y \rightarrow y=w$ P
   (3) $y=w \rightarrow y \neq 1$ P
   (4) $x=y$ P

2.4.4 Adjunción (A) o conjunción

Si disponemos de dos enunciados afirmados como premisas separadas, entonces puedo unirlos mediante una conjunción (y).

P	(Premisa)
Q	(Premisa)

$\therefore$ P $\wedge$ Q	(Conclusión)

Ejemplo 1: Conjunción.

P: Juan es cocinero.
Q: Pedro es policía.

Juan es cocinero.	(Premisa)
Pedro es policía.	(Premisa)

$\therefore$ Juan es cocinero y Pedro es policía.	(Conclusión)

2.4.5 Simplificación (S)

En la operación inversa a la adjunción o conjunción, si tengo una conjunción, puedo separar cada una de las partes:

P $\wedge$ Q	(Premisa)

$\therefore$ P	
Q	(Conclusión)

Ejemplo 1: Simplificación.

P: Juan es cocinero.
Q: Pedro es policía.
Juan es cocinero y Pedro es policía. (Premisa)

∴ Pedro es cocinero. (Conclusión)
∴ Juan es policía. (Conclusión)

Advertencia: Tanto en las reglas de la conjunción como en las de la disyunción, tener mucho cuidado con el paréntesis para aplicar la regla de la simplificación. En el caso de $(P \wedge Q) \rightarrow R$, **no puedo** simplificar la premisa, porque el conectivo lógico dominante es la implicación. Es **incorrecto** decir que entonces tendría $P \rightarrow R$. Si por el contrario, la proposición fuera $P \wedge (Q \rightarrow R)$, entonces puedo simplificar la premisa obteniendo P u obteniendo $Q \rightarrow R$, porque el conectivo lógico principal es la conjunción.

2.4.6 Disyunción (D)

Si disponemos de dos enunciados como premisas separadas, entonces puedo unirlos mediante una disyunción (o).

P (Premisa)
Q (Premisa)

∴ $P \vee Q$ (Conclusión)

Ejemplo 1: Disyunción.

P: Juan es cocinero.
Q: Pedro es policía.

Juan es cocinero. (Premisa)
Pedro es policía. (Premisa)

∴ Pedro es cocinero o Juan es policía. (Conclusión)

Ejercicios

Resolución de los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 64.

1. Probar que las conclusiones siguientes son consecuencia lógica de las premisas dadas. Dar la demostración completa (la demostración de los mismos son de los autores de la presente obra).

1. Demostrar: ¬S

(1) ¬R ^ T	P
(2) S → R	P
(3) ¬R	**S,1**
(4) ¬S	**TT, 2,3**

2. Demostrar: A ^ B

(1) C → A	P
(2) C	P
(3) C → B	P
(4) A	**PP,1,2**
(5) B	**PP,3,2**
(6) A^B	**A,4,5**

3. Demostrar: ¬¬Q

(1) P ^ Q	P
(2) Q	**S,1**
(3) ¬¬Q	**DN,2**

4. Demostrar: B ^ D

(1) B ^ C	P
(2) B → D	P
(3) B	**S,1**
(4) D	**PP 2,3**
(5) B^D	**A,3,4**

6. Demostrar: A ^ C

(1) A ^ ¬B	P
(2) ¬C → B	P
(3) ¬B	**S,1**
(4) C	**TT,2,3**
(5) A	**S,1**
(6) A^ ¬B	**A,5,6**

2.4.7 Modus Tollendo Ponens (TP)

Si disponemos de una proposición compuesta por una disyunción y la negación de una de las proposiciones simples como premisas, entonces podemos concluir la proposición simple que no ha sido negada.

P∨Q	(Premisa)	P∨Q	(Premisa)
¬P	(Premisa)	¬Q	(Premisa)
-------------		-------------	
∴ Q	(Conclusión)	∴ P	(Conclusión)

Ejemplo 1: *Tollendo Ponens*.

P=Voy al cine.
Q= Voy al teatro.

Voy al cine o voy al teatro.	(Premisa)
No voy al teatro.	(Premisa)

$\therefore$ Voy al cine. (Conclusión)

Recuerde que el conectivo lógico de la negación significa que es la operación contraria, de manera que esta regla también aplica para:

$\neg P \vee Q$	(Premisa)	$\neg P \vee \neg Q$	(Premisa)
P	(Premisa)	Q	(Premisa)
-------------		-------------	
$\therefore$ Q	(Conclusión)	$\therefore \neg P$	(Conclusión)

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 68-69.

1. "Deducir una conclusión de cada uno de los siguientes conjuntos de premisas usando el *modus tollendo ponens*".

1.	(1) $\neg Q \vee R$	P	8.	(1) $\neg T$	P
	(2) $\neg R$	P		(2) $T \vee \neg S$	P
2.	(1) $T \vee (P \to Q)$	P	9.	(1) $\neg(P \wedge Q)$	P
	(2) $\neg T$	P		(2) $T \vee (P \wedge Q)$	P
3.	(1) $\neg T \vee \neg R$	P	10.	(1) $T \vee U$	P
	(2) $\neg\neg R$	P		(2) $\neg T$	P
4.	(1) $P \vee Q$	P	11.	(1) $S \vee \neg T$	P
	(2) $\neg Q$	P		(2) T	P
5	(1) $(S \wedge T) \vee R$	P	12.	(1) $\neg(S \wedge R) \vee T$	P
	(2) $\neg(S \wedge T)$	P		(2) $S \wedge R$	P
6.	(1) $(P \wedge Q) \vee S$	P	13.	(1) $\neg(P \to Q) \vee R$	P
	(2) $\neg S$	P		(2) $P \to Q$	P
7.	(1) $\neg Q \vee R$	P			
	(2) $\neg\neg Q$	P			

2.4.8 Ley de la Adición (LA)

Si disponemos de un enunciado verdadero, se le puede adicionar mediante la disyunción cualquier otra proposición:

P (Premisa)

$\therefore P \wedge Q$ (Conclusión)

Ejemplo 1:

P: Juan es cocinero. (Premisa)

∴ Juan es cocinero y Pedro es policía. (Conclusión)

2.4.9 Ley del Silogismo Hipotético (SH)

Si disponemos de dos premisas que son implicaciones y el consecuente de la primera es el antecedente de la segunda, podemos concluir una implicación entre el antecedente de la primera y el consecuente de la segunda:

$P \rightarrow Q$ (Premisa)
$Q \rightarrow R$ (Premisa)

$\therefore P \rightarrow R$ (Conclusión)

Ejemplo 1: Silogismo hipotético.

P: Hace calor.
Q: Juana va a nadar.
R: Juana arregla la casa después de comer.

Si hace calor entonces Juana va a nadar. (Premisa)
Si Juana va a nadar entonces Juana arregla la casa después de comer. (Premisa)

∴ Si hace calor entonces Juana arregla la casa después de comer. (Conclusión)

Ejemplo 2: Silogismo hipotético.

1. Utilizar la ley del silogismo hipotético (HS) en una demostración formal para obtener una conclusión de los siguientes conjuntos de premisas (Suppes, 2013: 87).

1. **(1) Q → ¬P** **P**
   (2) ¬P →R **P**
   (3) Q →R SH,1,2

2. **(1) P →R ^ ¬S** **P**
   (2) R ^ ¬S → T **P**
   (3) P →(¬S → T) SH,1,2

3. **(1) S V T → R V Q** **P**
   (2) R V Q → ¬P **P**
   (3) S V T → ¬P SH,1,2

4. **(1) S → ¬T** **P**
   (2) ¬T → ¬R **P**
   (3) S → ¬R SH,1,2

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 87-88.

1. "Indicar una deducción formal de las siguientes conclusiones a partir de las premisas dadas".

Página 87:

1. Demostrar: **¬T**
   (1) (Q → R) ^P **P**
   (2) R → T **P**
   (3) (Q → R) → ¬T **P**

2. Demostrar: **P**
   (1) ¬R **P**
   (2) ¬P → Q **P**
   (3) Q → R **P**

3. Demostrar: **Q**
   (1) **¬R → S**
   (2) **S → P ^ Q**
   (3) **R → T**
   (4) **¬T**

Página 88:

1. Demostrar: (2+2) + 2 = 6 → 3 + 3 = 6
   (1) (2+2) + 2 = 6 → 3 x 2 = 6 P
   (2) 3 x 2 = 6 → 3 + 3 = 6 P

2. Demostrar: $5x - 4 = 3x + 4 \rightarrow x = 4$
   (1) $5x - 4 = 3x + 4 \rightarrow 5x = 3x + 8$ P
   (2) $2x = 8 \rightarrow x = 4$ P
   (3) $5x = 3x + 8 \rightarrow 2x = 8$ P

3. Demostrar: $z>6 \lor z<y$
   (1) $x>y \rightarrow x>z$ P
   (2) $\neg(z>6) \rightarrow \neg(x>y \rightarrow z<7)$ P
   (3) $x>z \rightarrow z<7$ P

4. Demostrar: $x=6 \lor x>6$
   (1) $x\neq y \rightarrow y<x$ P
   (2) $(x>5 \rightarrow y<x) \rightarrow y=5$ P
   (3) $y\neq 5 \lor x=6$ P
   (4) $x>5 \rightarrow x\neq y$ P

2.4.10 Ley del Silogismo Disyuntivo (SD)

Para utilizar dicha ley se requieren 3 premisas, una disyunción y dos condicionales. Donde la disyunción dada está compuesta por los antecedentes de ambas condicionales, y la conclusión será la disyunción compuesta por los dos consecuentes de las premisas dadas.

$R \lor D$	(Premisa)
$R \rightarrow P$	(Premisa)
$D \rightarrow B$	(Premisa)

$\therefore P \lor B$	(Conclusión)

Ejemplo 1: Silogismo disyuntivo.

R: Llueve.
D: El campo está seco.
P: Jugaremos dentro.
B: Jugaremos al baloncesto.

Llueve o el campo está seco.	(Premisa)
Si llueve entonces jugaremos dentro.	(Premisa)
Si el campo está seco entonces jugaremos al baloncesto.	(Premisa)
--	
∴ Jugaremos dentro o jugaremos al baloncesto.	(Conclusión)

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 91.

Simboliza las siguientes proposiciones y deduce la conclusión a partir de la regla del silogismo disyuntivo.

"1. O Juan tiene mayoría o Pedro tiene mayoría. Si Juan tiene mayoría, entonces Pedro será el tesorero. Si Pedro tiene mayoría, entonces Juan será el tesorero.
2. Este número o es un número positivo o es un número negativo. Si es un número positivo, es mayor que cero. Si es un numero negativo, es menor que cero.
3. Esta roca o es piedra caliza o es granito. Si es piedra caliza es sedimentaria. Si es granito, es ígnea.
4. O la cámara fue adquirida legalmente por el vendedor o la cámara es mercancía robada. Si la cámara fue adquirida legalmente por el vendedor, entonces es mi cámara. Si la cámara es mercancía robada, entonces Tomás es su propietario legal.
5. O la planta es una planta verde o es una planta no verde. Si es una planta verde, entonces fabrica su propio elemento. Si es una planta no verde, entonces depende de las materias de otras plantas para su alimento".

2.5 Cálculo deductivo proposicional

Una vez dominada la simbolización de proposiciones y conocidas las reglas de inferencia y las de equivalencia, podemos dirigirnos hacia la parte formal de la lógica conocida como "Cálculo deductivo". Más formalmente dicho *deducción*.

Las reglas de inferencia y de equivalencia, así como su uso, son las reglas de un juego que se juega con proposiciones y fórmulas lógicas. Comienza con un conjunto de proposiciones iniciales que se denominan *premisas* y el objeto del juego es llegar a una *conclusión o consecuencia lógica* aplicando las reglas de inferencia o equivalencia (Suppes, 2013).

El paso lógico para pasar de las premisas a una conclusión se denomina *deducción*; si cada paso lógico que se da para llegar a la conclusión final está permitido por una regla de inferencia o de equivalencia, entonces se dice que la conclusión final es una consecuencia lógica de las premisas establecidas (Suppes, 2013).

Ahora bien, si las premisas son verdaderas se obtendrán conclusiones verdaderas (*inferencia*); cuando la consecuencia lógica se *deriva* de las premisas, se dice entonces que hemos llegado a un razonamiento *válido*.

A lo largo de estas notas se han establecido 10 reglas de inferencia y 10 reglas de equivalencia con las cuales se pueden hacer los movimientos necesarios para una demostración o una deducción de un razonamiento a partir de una serie de premisas. El objetivo de una demostración o una deducción es llegar a la conclusión previamente establecida a través de pasos lógicos permitidos.

Cada cabeza es un mundo, reza un dicho, y no hay un solo camino para llegar a demostrar cierta conclusión a partir de ciertas premisas, así que siéntanse en libertad de jugar como mejor les parezca este juego del cálculo deductivo. Para ello, se anexa un resumen de las reglas de inferencia y las reglas de equivalencia.

Reglas de equivalencia para el cálculo deductivo

RE 1) $P \rightarrow Q \equiv (\neg P \vee Q)$
RE 2) $(P \leftrightarrow Q) \equiv (P \rightarrow Q) \wedge (Q \rightarrow P)$

Nombre	Disyunción	Conjunción
Idempotencia	$P \vee P \equiv P$	$P \wedge P \equiv P$
Conmutativa	$P \vee Q \equiv Q \vee P$	$P \wedge Q \equiv Q \wedge P$
Asociativa	$(P \vee Q) \vee R \equiv P \vee (Q \vee R)$	$(P \wedge Q) \wedge R \equiv P \wedge (Q \wedge R)$
Absorción	$P \vee (P \wedge Q) \equiv P$	$P \wedge (P \vee Q) \equiv P$
Distributiva	$P \vee (Q \wedge R) \equiv (P \vee Q) \wedge (P \vee R)$	$P \wedge (Q \vee R) \equiv (P \wedge Q) \vee (P \wedge R)$
Leyes de De Morgan	$\neg (P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$	$\neg (P \wedge Q) \equiv \neg P \vee \neg Q$
Identidad	$P \equiv P$	

Reglas de inferencia

1. ***Modus Ponendo Ponens*** **(PP)**: afirmando el antecedente, afirmo el consecuente.	**2.** ***Modus Tollendo Tollens*** **(TT)**: negando el antecedente, niego el consecuente.
$P \rightarrow Q$ (Premisa) P (Premisa) ------------- $\therefore Q$ (Conclusión)	$P \rightarrow Q$ (Premisa) $\neg Q$ (Premisa) ------------- $\therefore \neg P$ (Conclusión)

3. Doble Negación (DN): si niego algo dos veces, entonces lo afirmo. $\neg\neg P \equiv P$	**4. Adjunción (A)**: si disponemos de dos enunciados afirmados como premisas separadas, entonces puedo unirlos mediante una conjunción (y). P (Premisa) Q (Premisa) ------------- $\therefore P \wedge Q$ (Conclusión)
5. Simplificación (S): es una operación inversa a la conjunción, si tengo una conjunción, puedo separar cada una de las partes $P \wedge Q$ (Premisa) ------------- $\therefore$ P Q (Conclusión)	**6. Disyunción (D)**: si disponemos de dos enunciados como premisas separadas, entonces puedo unirlos mediante una disyunción (o). P (Premisa) Q (Premisa) ------------- $\therefore P \vee Q$ (Conclusión)
7. *Modus Tollendo Ponens* (TP): si disponemos de una proposición compuesta por una disyunción y la negación de una de las proposiciones simples como premisa, entonces podemos concluir la proposición simple que no ha sido negada. $P \vee Q$ (Premisa) $\neg P$ (Premisa) ------------- $\therefore Q$ (Conclusión)	**8. Ley de la Adición (LA)**: si disponemos de un enunciado verdadero, se puede adicionar mediante la disyunción cualquier otra proposición: P (Premisa) ------------- $\therefore P \wedge Q$ (Conclusión)
9. Ley del Silogismo Hipotético (SH): $P \rightarrow Q$ (Premisa) $Q \rightarrow R$ (Premisa) ----------- $\therefore P \rightarrow R$ (Conclusión)	**10. Ley del Silogismo Disyuntivo (SD)**: $R \vee D$ (Premisa) $R \rightarrow P$ (Premisa) $D \rightarrow B$ (Premisa) ----------- $\therefore P \vee B$ (Conclusión)

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro *Introducción a la lógica matemática* de Suppes, 2013: 76-77, 84.

"Dar una demostración formal completa de los razonamientos siguientes":

Página 76-77:

1. Demostrar: $y + 8<12$
   (1) $x+8=12 \vee x\neq 4$
   (2) $x=4 \wedge y<x$
   (3) $x+8=12 \wedge y<x \rightarrow y+8<12$

2. Demostrar: $x<4 \wedge y<6$*[4]
   (1) $x+2<6 \rightarrow x<4$
   (2) $y<6 \vee x+y\not<10$
   (3) $x+y<10 \wedge x+2<6$

3. Demostrar: $x=5 \wedge x\neq y$
   (1) $x=y \rightarrow x\neq y+3$
   (2) $x=y+3 \vee x+2=y$
   (3) $x+2\neq y \wedge x=5$

4. Demostrar: $y>z$
   (1) $x=y \rightarrow x=z$
   (2) $x\neq y \rightarrow x<z$
   (3) $x\not<z \vee y>z$
   (4) $y\neq z \wedge x\neq z$

5. Demostrar: $x<5$
   (1) $x<y \vee x=y$
   (2) $x=y \rightarrow y\neq 5$
   (3) $x<y \wedge y=5 \rightarrow x<5$

6. Demostrar: $\text{tag}\theta\neq 0.577$
   (1) $\text{tag}\theta=0.577 \rightarrow \text{sen}\theta=0.500 \wedge \cos\theta=0.866$
   (2) $\text{sen}\theta=0.500 \wedge \cos\theta=0.866 \rightarrow \cot\theta=1.732$
   (3) $\sec\theta=1.154 \vee \cot\theta\neq 1.732$
   (4) $\sec\theta\neq 1.154$

7. Demostrar: $\neg(y>7 \vee x=y)$
   (1) $x<6$
   (2) $y>7 \vee x=y \rightarrow \neg(7=4 \wedge x<y)$
   (3) $y\neq 4 \rightarrow x\not<6$
   (4) $x<6 \rightarrow x<y$

8. Demostrar: $x>6$
   (1) $x>5 \rightarrow x=6 \vee x>6$
   (2) $x\neq 5 \wedge x<5 \rightarrow x>5$
   (3) $x<5 \rightarrow x\neq 3+4$
   (4) $x=3+4 \wedge x\neq 6$
   (5) $x=3+4 \rightarrow x\neq 5$

9.Demostrar: $x=4$
   (1) $3x+2y=18 \wedge x+4y=16$
   (2) $x=2 \rightarrow 3x+2y\neq 18$
   (3) $x=2 \vee y=3$
   (4) $x\neq 4 \rightarrow y\neq 3$

[4] Suppes comenta que "por conveniencia se introducen las notaciones $\not<$ y $\not>$ para « no es menor que» y « no es mayor que» de manera que « $\neg(x<y)$ » se puede escribir « $x\not<y$ » y « $\neg(x>y)$ » se puede escribir « $x\not>y$ »" (2013: 76).

Página 84:

2. Demostrar: $x>y \vee y \not< 6$
   (1) $x>y \vee x>5$
   (2) $x \not> 5 \vee y \not< 6$
   (3) $x+y=1 \wedge x>y$

3. Demostrar: $x \neq 3 \vee x>2$
   (1) $x+2 \neq 5 \vee 2x=6$
   (2) $x+2 \neq 5 \rightarrow x \neq 3$
   (3) $2x-2=8 \rightarrow 2x \neq 6$
   (4) $x+3=8 \wedge 2x-2=8$

4. Demostrar: tag30°=0.577 $\vee$ cos60°=0.5
   (1) sen30°=0.5 $\rightarrow$ csc30°=2.0
   (2) sen30°=0.5
   (3) csc30°=2.0 $\rightarrow$ tag30°=0.577

2.6 Formas normales

Las formas normales son una equivalencia lógica a los conectivos ($\vee$, $\wedge$, $\neg$); cualquier conectivo lógico puede ser equivalente a una disyunción, una conjunción o una negación, usando para ello las reglas de equivalencia ya expuestas en los capítulos anteriores. El objetivo de transformar algo a su forma normal es simplificar su procedimiento de prueba.
Existen dos formas normales:

a) Forma normal disyuntiva: (FND) es una forma normal disyuntiva si y solo si $\beta \equiv \alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \ldots \vee \alpha_n$ y cada α_i es una conjunción de literales.

Ejemplo 1: Forma normal disyuntiva.

$(Q \wedge P) \vee (\neg R \vee S) \vee \neg Q$

Es una forma normal disyuntiva ya que $(Q \wedge P)$, $(\neg R \vee S)$, $\neg Q$ son literales unidas a través del conectivo lógico disyunción ($\vee$).

Ejemplo 2: Forma normal disyuntiva.

Transformar a su formal normal disyuntiva la siguiente proposición:

1) $P \rightarrow \neg P$
2) $\neg P \vee P$ Ley de equivalencia 1. Esta es la FND.

b) Forma normal conjuntiva: (FNC) es una forma normal conjuntiva si y solo si $\beta \equiv \alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \ldots \wedge \alpha_n$ y cada α_i es una conjunción de literales.

Ejemplo 3: Forma normal conjuntiva.

$(Q \wedge P) \wedge (\neg R \vee S) \wedge \neg Q$

Es una forma normal disyuntiva ya que $(Q \wedge P)$, $(\neg R \vee S)$, $\neg Q$ son literales unidas a través del conectivo lógico conjunción ($\wedge$).
Cuando una proposición no está en su forma normal es necesario aplicar las reglas de equivalencia para poder encontrarla.

Ejemplo 4: Forma normal conjuntiva.

Transformar la proposición $(P \vee \neg Q)$ a su forma normal conjuntiva:

1) $(P \vee \neg Q) \rightarrow R$
2) $\neg(P \vee \neg Q) \vee R$ por regla de equivalencia, 1
3) $\neg(\neg (P \vee \neg Q) \wedge \neg R)$ Leyes de De Morgan 2

Ejercicios

Resuelva los siguientes ejercicios del libro: *Programación lógica. Teoría y Práctica* de Iranzo y Alpuente, 2007: 92.

1) Transformar a su forma normal conjuntiva las siguientes proposiciones:

   a) $P \rightarrow \neg P$
   b) $\neg (P \rightarrow Q)$
   c) $P \vee (\neg P \wedge Q \wedge R)$
   d) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow (P \wedge \neg Q)$
   e) $\neg(P \rightarrow Q) \vee (P \vee R)$

2) Transformar a su forma normal disyuntiva las siguientes proposiciones:

   a) $(\neg P \wedge Q) \rightarrow R$
   b) $\neg(P \vee \neg Q) \vee (S \rightarrow T)$
   c) $\neg(P \wedge Q) \wedge (P \vee Q)$
   d) $P \rightarrow ((Q \rightarrow R) \rightarrow S)$
   e) $(P \rightarrow Q) \rightarrow R$

2.7 Ejemplos en lenguajes de programación

Para ejemplificar los usos de la lógica proposicional, las tablas de verdad y el cálculo deductivo en los lenguajes de programación, se utiliza el paquete Excel 2010, asequible para el estudiante en cualquier computadora.

Excel es un software que permite crear tablas de datos donde las columnas aparecen numeradas por letras y los renglones por número; para indicar una columna y un renglón en específico es necesario escribir la letra de la columna, seguido del número del renglón al que quieres hacer referencia;

de manera que A2 significa que tomarás el dato escrito en la columna A y el segundo renglón; B6 significa que tomarás el dato escrito en la columna B y el sexto renglón.

Los símbolos =, >, <, ≥, ≤, ≠ indican lo mismo que en cualquier función matemática, y sirven en las funciones lógicas de Excel para indicarle al programa las comparaciones a realizar entre datos específicos. Por ejemplo, si escribes A2=7 dentro de una función lógica el programa entenderá que tiene que comparar el valor escrito en la casilla A2 con el número 7; si escribes A2≥7 el programa entenderá que tiene que verificar que el valor escrito en la casilla A2 sea mayor o igual a 7.

Cuando Excel indica (valor_lógico) o (prueba_lógica) se refiere al tipo de comparaciones que el usuario requiere hacer, de manera que en (valor_lógico) se deberá escribir algo de la forma (A2=7) o (A2=SI) o (A2≥8).

Así, los cinco conectivos lógicos en Excel se representan por las siguientes funciones:

Conectivo lógico	Función en Excel	Observaciones
Negación	=NO (valor_lógico)	En este caso Excel comparará el valor lógico que el usuario ha asignado y si **NO** se cumple, arrojará la frase: VERDADERO; en caso contrario pondrá FALSO (recordemos que es la NEGACIÓN).
Conjunción	=Y (valor_lógico1, valor lógico2, ...)	En este caso Excel verificará que se cumpla el primer valor lógico **Y**, se cumpla el segundo valor lógico **Y**, se cumpla el tercer valor lógico **Y**, así sucesivamente hasta agotar todos los posibles valores lógicos que el usuario haya asignado. Si todos los valores lógicos se cumplen, Excel asignará VERDADERO, en caso contrario asignará FALSO. Basta y sobra con que uno de los valores lógicos no se cumpla para que Excel asigne FALSO a toda la proposición. En otras palabras, Excel calcula las tablas de verdad, considerando a cada valor lógico como una proposición simple.
Disyunción	=O (valor_lógico1, valor lógico2, ...)	En este caso Excel verificará que se cumpla el primer valor lógico **O**, se cumpla el segundo valor lógico **O**, se cumpla el tercer valor lógico **O**, así sucesivamente hasta agotar todos los posibles valores lógicos que el usuario haya asignado. Si al menos uno de los valores lógicos se cumple, Excel asignará VERDADERO, en caso contrario asignará FALSO. Basta y sobra con que uno de los valores lógicos se cumpla para que Excel asigne VERDADERO a toda la proposición. En otras palabras, Excel calcula las tablas de verdad, considerando a cada valor lógico como una proposición simple.

Conectivo lógico	Función en Excel	Observaciones
Condicional	=SI (prueba_lógica, [valor si verdadero], [valor si falso])	En este caso Excel verificará que se cumpla la prueba lógica, **SI** se cumple entonces arrojará el valor que el usuario haya asignado en el espacio [valor si verdadero], **SI** no se cumple entonces arrojará el valor que el usuario haya asignado en el espacio [valor si falso]. Excel calcula las tablas de verdad de una implicación, considerando a cada valor lógico como una proposición simple.
Bicondicional	NO EXISTE	Como se explicó en el apartado de conectivos lógicos, la bicondicional es una doble implicación que va de ida y de vuelta, razón por la cual para indicarle a Excel el cálculo de una función bicondicional es necesario hacer uso de la condicional dos veces.

Ejercicio

Imagínece una tabla de Excel donde a la primera columna la denomina P; ahí el usuario escribirá el valor de verdad de la primera proposición simple; a la segunda columna la nombra Q; ahí el usuario escribirá el valor de verdad de la segunda proposición simple. La tercera columna se llamará P↔Q; en esta columna Excel arrojará automáticamente el valor de verdad que le correspondería a una bicondicional, así tendría una tabla como sigue:

P	Q	P↔Q
0 o 1 (el usuario lo proporciona)	0 o 1 (el usuario lo proporciona)	0 o 1 (la máquina lo calcula)

1. Observe la tabla de verdad para la bicondicional, ¿en qué casos arroja un 1 y en qué casos arroja un 0? Indique su respuesta usando conectivos lógicos.

> Respuesta esperada:
> Arroja un 1, cuando P es igual a 1 **Y** Q es igual a 1, **O** cuando P es igual a cero **Y** Q es igual a cero. En cualquier otro caso es cero.
>
> **SI** P es igual a 1 **Y** Q es igual a 1, **O** P es igual a cero **Y** Q es igual a cero, **ENTONCES**, P↔Q=1.

2. Asigne una letra mayúscula del abecedario a cada proposición simple de su enunciado anterior.

> Respuesta esperada:
> A: P=1
> B: Q=1
> C: P↔Q=1, en otro caso pone ¬C
>
> ¬A: P≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬A: P≠1, significa P=0
> ¬B: Q≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬B: Q≠1, significa Q=0
> ¬C: P↔Q≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬C: P↔Q ≠1, significa P↔Q =0

3. Simbolize la proposición compuesta que lanzó en el número 1 de este ejercicio. Recuerde bien el uso de paréntesis.

> Respuesta esperada:
> A: P=1
> B: Q=1
> C: P↔Q=1
>
> ¬A: P≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬A: P≠1, significa P=0
> ¬B: Q≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬B: Q≠1, significa Q=0
> ¬C: P↔Q≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬C: P↔Q ≠1, significa P↔Q =0
>
> **SI** P es igual a 1 **Y** Q es igual a 1, **O** P es igual a cero **Y** Q es igual a cero, **ENTONCES**, P↔Q=1.
>
> **[(A∧B)∨(¬A∧¬B)]→C**

4. Sin utilizar la computadora calcule (manualmente) las tablas de verdad.

A	B	A∧B	¬A	¬B	¬A∧¬B	(A∧B)∨(¬A∧¬B)	Si (A∧B)∨(¬A∧¬B) es verdad→C
1	1	1	0	0	0	1	1
1	0	0	0	1	0	0	0
0	1	0	1	0	0	0	0
0	0	0	1	1	1	1	1

5. Haga lo mismo para las tablas de verdad de la disyunción.

a) Observe la tabla de verdad para la disyunción, ¿en qué casos arroja un 1 y en qué otros arroja un 0? Indique su respuesta usando conectivos lógicos.

Respuesta esperada:
Arroja un 0 únicamente si P es igual a 0 Y Q es igual a 0

SI P es igual a 0 **Y** Q es igual a 0, **ENTONCES**, P∨Q=0

b) Asigne una letra mayúscula del abecedario a cada proposición simple de su enunciado anterior.

Respuesta esperada:
A: P=1
B: Q=1
C: P∨Q=1

¬A: P≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬A: P≠1, significa P=0
¬B: Q≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬B: Q≠1, significa Q=0
¬C: P∨Q≠1, dado que solo hay dos valores en este caso ¬C: P↔Q ≠1, significa P∧Q =0
SI P es igual a 0 **Y** Q es igual a 0, **ENTONCES**, P∨Q=0
(¬A∨¬B)→ ¬C

c) Sin utilizar la computadora calcule (manualmente) las tablas de verdad.

A	**B**	**¬A**	**¬B**	**(¬A∨¬B)**	**Si (¬A ∨¬B) es verdad entonces ¬C**
1	1	0	0	0	1
1	0	0	1	0	1
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	1	0

3
Lógica de primer orden o lógica de predicados

La lógica de predicados o lógica de primer orden surge de la necesidad de analizar las relaciones existentes entre los elementos de dos o más proposiciones simples o atómicas. Esta afirmación se puede comprender más claramente cuando de manera intuitiva y no formal establecemos una conclusión que aunque válida no se puede comprobar a través de los elementos establecidos en la lógica proposicional.

Ejemplo 1: Lógica proposicional.

> P: Tita es hermana de Julián.
> Q: Julián es padre de Carmela.
> S: A los hermanos de los padres se les nombra tíos.
> ____
> $\therefore$ R: Tita es tía de Carmela.

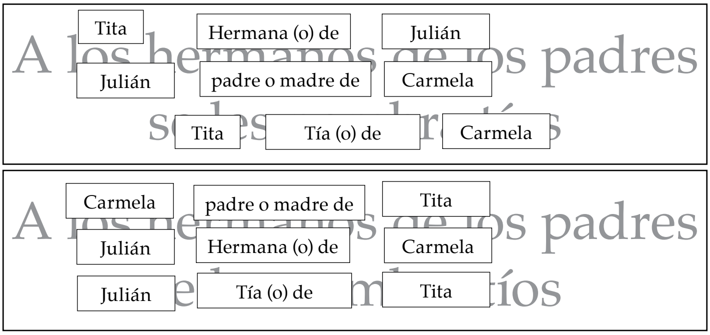
La afirmación Tita es tía de Carmela es correcta, dadas las premisas establecidas. Sin embargo, su comprobación es imposible a partir de las reglas de inferencia conocidas en la lógica proposicional. La afirmación Tita es tía de Carmela hace referencia a la relación existente entre dos sujetos que aparecen dentro de las premisas de dicho argumento.

Es como si tuviéramos la necesidad de cortar en pedazos cada una de las proposiciones, para que a partir de dichos pedazos pudiéramos construir la conclusión (figura 1).

Figura 1

De manera que al tener como recortes a las proposiciones simples es fácil entender las relaciones entre ellos; incluso si las relaciones entre los sujetos cambiaran sería sencillo obtener una conclusión sobre este asunto familiar (figura 2).

Figura 2



La lógica proposicional carece de herramientas para manejar estos fraccionamientos. Usualmente es muy sencillo "fraccionar" correctamente una proposición simple a partir de dos preguntas: ¿qué se afirma? y ¿de quién se afirma?

En la pregunta ¿de quién se afirma? es fácil comprender que hacemos alusión a lo que en gramática se conoce como sujeto; mientras que en ¿qué se afirma? es el predicado de la oración.

Existen predicados unarios y binarios; el primero es cuando se está relatando una cualidad o un atributo sobre una sola persona.

Ejemplo 2: predicado unario.

P: Pedro es carpintero.

¿Qué se afirma? Que es carpintero. ¿Quién? Pedro. De manera que en este caso no hay una relación con otro sujeto u objeto como en los ejemplos de las relaciones familiares.

Los predicados binarios se caracterizan por enfatizar la relación existente entre dos sujetos.

Ejemplo 3: predicado binario.

P: Pedro es el carpintero de Ramón.

¿Qué se afirma? Que es carpintero. ¿Quién? Pedro ¿De quién es carpintero Pedro? De Ramón. De manera que en este caso si hay una relación entre dos sujetos.

3.1 Variables

Una variable, como su nombre lo indica, es una característica, una magnitud, un atributo o una cosa que varía de un objeto a otro. Regularmente se denotan con las últimas letras del alfabeto escritas en minúsculas.

En el caso del ejemplo de la figura 2 se puede ver que no importa el nombre de los sujetos; si la relación entre ellos permanece, la conclusión continúa siendo la misma.

De manera que Julián, Tita y Carmela son una particularización de un caso general al que se podría llamar: x, y, z.

Figura 3

x	padre o madre de	y
z	Hermana (o) de	x
z	Tía (o) de	y

A los hermanos de los padres se les nombra tíos

Porque no importa el nombre; si la relación se mantiene, la conclusión también.

Así x es igual a Tita, María, Samuel…, la cuestión es que sea quien fuere, si "x" es padre de "y" y "z" es hermano de "x", entonces "z" siempre será tía de "y".

Es fácil identificar a las variables en estas oraciones, regularmente son los sujetos u objetos de los que se dice algo.

3.2 Predicado, función o relación

El predicado es la respuesta a la pregunta ¿qué se afirma de un sujeto u objeto? o ¿cuál es la relación entre dos sujetos u objetos? Se denota regularmente con una letra mayúscula; posterior a la letra mayúscula se incluye un paréntesis para indicar la variable o variables de las que se está estableciendo dicha afirmación, de esta forma se está indicando cuál es la relación, función o predicado de la proposición.

Ejemplo 1: Predicado.

P: "x" es hermana de "z".

¿Qué se afirma? o ¿cuál es la relación existente entre los objetos o sujetos? Respuesta: es hermana de…, de manera que al predicado lo nombraremos como H.

¿Quién o quiénes son los sujetos u objetos de los que se hace dicha afirmación?

Son las variables "x" y "z".

La simbolización de la relación existente entre estas variables se simbolizaría en lógica de primer orden como:

H(x, z)

La cual se lee como "x" es hermana de "z".

En el caso de los predicados unarios, solo se incluiría una variable o un sujeto en particular.

Ejemplo 2: Predicado unario.

P: "x" es carpintero.

¿Qué se afirma? o ¿cuál es la relación existente entre los objetos o sujetos? Respuesta: es carpintero, al cual denotaremos como C.

¿Quién o quiénes son los sujetos u objetos de los que se hace dicha afirmación?

Es la variable "x"

La simbolización de este predicado se simbolizaría en lógica de primer orden como:

C(x)

La cual se lee como "x" es carpintero.

Nota: cuando el enunciado o la proposición hace alusión a un nombre u un objeto en particular y no a una variable, entonces se incluye como tal.

Ejemplo 3: Particularización.

P: Juan es tío de María.
Se simboliza como T(j, m).
Donde:

T= es tío de
j = Juan
m= María

Ejercicios

1. Simbolize en lógica de primer orden las siguientes expresiones:

a) Julián es padre de Tita.
b) x es número par.
c) Luis es estudiante.
d) "x" es estudiante de informática.
e) "y" es una variable cuantitativa.

3.3 Cuantificadores

a) Cuantificador universal: se les considera como tal a todas aquellas frases que incluyen "Todos" o "Ninguno".

Ejemplo 1: Cuantificador universal.

P: Todos los pingüinos son negros.
Q: Ningún informático lleva clases de piano.
R: Todos los números x que son pares también son enteros.

El cuantificador universal se denota por el símbolo $\forall$, acompañado de la variable o variables en cuestión. Es decir, si la variable es x se denota $\forall_{\chi}$.

b) Cuantificador existencial: son todas aquellas frases que incluyen la idea de "Algunos".

Ejemplo 2: Cuantificador existencial.

P: Algunos pingüinos son negros.
Q: Existen algunos informáticos que llevan clases de piano.
R: Algunos números "x" que son pares también son enteros.

El cuantificador existencial se denota por el símbolo $\exists$, acompañado de la variable o variables en cuestión, es decir si la variable es x se denota $\exists_{\chi}$.

3.4 Simbolización de proposiciones

Al igual que en lógica proposicional, la lógica de primer orden incluye los conectivos lógicos que ya se conocen y se simbolizan de la manera en que se explicó en el apartado 1.4 de este libro.

Al iniciar en la simbolización de proposiciones es necesario conocer el concepto de dominio. Dado que este es un curso de lógica-matemática nos apegaremos a la definición matemática de dominio.

> Definición 3.1. Dominio: es el conjunto de partida de una función; es decir, aquellos valores para los cuales una función está definida. Regularmente se denota con la letra $\mathscr{D}$.

Ejemplo 1: Dominio.

P: Algunos pingüinos son negros.
$\mathscr{D}$=Pingüinos, dado que este es el conjunto de partida sobre el que se está haciendo una afirmación.
Q: Existen algunos informáticos que llevan clases de piano.
$\mathscr{D}$=Informáticos.
R: Algunos números x que son pares también son enteros.
$\mathscr{D}$=Números enteros.

Ahora bien, en lógica de predicados es importante identificar el conectivo lógico de la oración, porque no viene claramente definido como en el caso de lógica proposicional, sino hay que distinguirlo de entre las posibles opciones surgidas en el momento.

Ejemplo 2: Elegir conectivo lógico.

P: Todo entero par es divisible entre dos.
1. ¿Qué se afirma?
   Que **SI** es entero par, **ENTONCES** es divisible entre dos.
2. ¿De quién se afirma?
   De todo entero par.
3. ¿Existe cuantificador? ¿Cuál sería?
   Cuantificador universal.
4. ¿Cuál es el dominio? (¿para qué números está definida esta afirmación?).
   $\mathscr{D}$=Números enteros.

De manera que la variable es cualquier entero al que llamaremos "x". P significa número par. D significa divisible entre dos.

Primero se hace referencia al cuantificador universal que acompaña esta oración y a la variable entero par (x). La simbolización de esta proposición iniciaría con: $\forall_x$.

Después, el conectivo lógico que une esta proposición es una implicación entre dos funciones:

1. "x" entero par.
2. "x" divisible entre dos.

De manera que "x es entero par"; se escribiría en términos de función como P(x) y "x es divisible entre dos" como D(x).
Juntando todos estos elementos, el enunciado: "Todo entero par es divisible entre dos", quedaría simbolizado como:

$$\forall_{\chi}\ [P(x) \rightarrow D(x)]$$

Donde:

$\mathcal{D}$=Números enteros.
x $\in \mathcal{D}$ (el símbolo $\in$, significa pertenece, así la expresión se lee "x pertenece al dominio").
P: es par.
D: es divisible entre dos.

La información que está enunciada en el párrafo anterior (después de la palabra donde) es sumamente necesario agregarla, de esta forma cualquier lector es capaz de comprender lo que la simbología de lógica de predicados significa. **La simbolización sin esta información se encuentra incompleta**.

Para simbolizar en lógica de predicados es importante identificar tanto las variables directas como las variables indirectas.

Ejemplo 3: Variables indirectas.

P: Todo entero par es divisible entre otro número entero (no estamos calificando la veracidad de esta afirmación, sino solo ejemplificando su simbolización).

1. ¿Qué se afirma?
   Que **SI** es entero par, **ENTONCES** es divisible entre otro número entero.
2. ¿De quién se afirma?
   De todo entero par.
3. ¿Hay alguna variable que aunque no sea sujeto es un objeto indirecto sobre el que se afirma algo?
   Sí, otro número entero es una variable indirecta.
4. ¿Existe cuantificador para el sujeto de este enunciado? ¿Cuál sería?
   Cuantificador universal.
5. ¿Existe un cuantificador para la variable indirecta de este enunciado?

¿Cuál sería?
Cuantificador universal.

6. ¿Cuál es el dominio, tanto de la variable directa como de la indirecta? (para qué números está definida esta afirmación).
   $\mathcal{D}$=Números enteros.

De manera que la variable "x" es cualquier entero par; y la variable otro número entero será llamada "y". La expresión: "Todo entero par es divisible entre otro número entero", se simboliza como sigue.

$$\forall_\chi \forall_y \, [P(x) \rightarrow D(x,y)]$$

Donde:

$\mathcal{D}$=Números enteros.
$x \in \mathcal{D}$ y $y \in \mathcal{D}$
P: es par.
D: es divisible entre.

Ejemplo 4: Significado de fórmulas.

Establecer los significados de las dos fórmulas siguientes, en las que P, H, T denotan las relaciones "padre de", "hermana de" y "tía paterna de" respectivamente.

1. $\forall_\chi \, \forall_y \, \forall_z \, [(P(y,x) \wedge H(z,y)) \rightarrow T(z,x)]$
   Para todo "x", "y" y "z", si "y" es padre de "x" y "z" es hermana de "y", ento ces "z" es tía paterna de "x".
2. $\forall_\chi \, \forall_z \, [T(z,x) \rightarrow \exists_y \, (P(y,x) \wedge H(z,y))]$
   Para todo "x" y "z", si "z" es tía paterna de "x" entonces "y" es padre de alguna "x" y "z" es hermana de "y".

Ejemplo 5: simbolización de enunciados.

a) Si por el contrario tuviéramos que simbolizar algunos enunciados para un argumento, el ejercicio sería como sigue:

Argumento:

P_1: Juan es el padre de José.	Premisa
P_2: Pedro es hermano de Juan.	Premisa
P_3: El hermano del padre de una persona es tío de esta.	Premisa
--	
$\therefore$ C: Pedro es tío de José.	Conclusión

Sea P el predicado "padre de", H el predicado "hermano de" y T el predicado "tío de".

1) definimos el dominio $\mathcal{D}$ =conjunto de seres humanos.

El argumento simbolizado en lógica de predicados sería el siguiente:

P_1: P(Juan, José).	Premisa
P_2: H(Pedro, Juan).	Premisa
P_3: $\forall_\chi \forall_y \forall_z [(P(x,y) \wedge H(z,x)) \rightarrow T(z,y)]$	Premisa

---

C : T(Pedro, José).

b) Representar cada uno de los enunciados siguientes en el cálculo de predicados.

1. El papá de cada ser humano es uno de sus familiares.
   $\forall_\chi \forall_y [P(y,x) \rightarrow F(y,x)]$

Donde:

$\mathcal{D}$ =conjunto de seres humanos.
P: Es padre de.
F: Es familiar de.

2. Todo el que aprecie a Jorge escogerá a Pedro para su partido.
   $\forall_\chi [A(x, \text{Jorge}) \rightarrow E(x, \text{Pedro})]$

Donde:

$\mathcal{D}$ =conjunto de seres humanos.
A: Aprecia a
E: Escogerá a alguien para su partido.

Nota: Es importante la definición del dominio ($\mathcal{D}$) para no caer en confusiones. Ya que de dicha definición depende en gran medida la simbolización.

Ejemplo 6: Definición del dominio.

Proposición: Todas las águilas vuelan.

Si definimos al dominio como águilas ($\mathcal{D}$ =águilas), entonces su simbolización quedaría: $\forall_\chi$ (V(x)), donde V=vuela.

En cambio, si elegimos al dominio como animales ($\mathcal{D}$ =animales), entonces su simbolización quedaría: $\forall_\chi$ (A(x) → V(x)), donde A=águila y V=vuela.

Ejercicios: Simbolice las siguientes proposiciones.

1. Todos los informáticos estudian lógica e inglés.
2. Todo lo que brilla es oro.
3. Existe por lo menos un triángulo que tiene sus lados y sus ángulos iguales.
4. María es la madre de alguien.
5. Fernando y Rosa son padres de alguna persona.
6. Sea P padre de y M madre de, P(Julio, Roberto)∧M(Rosa, Julio), ¿cuál es la relación entre Rosa y Roberto?
7. Sea P padre de y M madre de, $\exists_\chi \exists_y$ [P(Tomás, x)→ D(Yuya, y)]. Traducir esta proposición a una oración.

Los siguientes ejercicios son del libro de Bustamante, 2009: 185-186, simbolice las proposiciones.

Página 185:

1. Todo ser humano tiene una madre
2. Cada número natural tiene un sucesor.
3. Todo estudiante aprecia a alguno de sus compañeros.
5. Todo número diferente de cero tiene un inverso multiplicativo.

Página 186:

1. Algún profesor aprecia a todos los estudiantes.

3.5 Negación de cuantificadores

En lógica de predicados la negación sobre un cuantificador universal se escribe a través del cuantificador existencial y se niega su alcance.

Ejemplo 1: Negación del universal (NU)

P_1: Todo adolescente se siente incomprendido.

Su negación sería decir “No todos los adolescentes se sienten incomprendidos”, que sería lo mismo que decir “EXISTE algún adolescente que no se siente incomprendido”.

De manera que:
Donde:

$\mathcal{D}$=Seres humanos.
x $\in \mathcal{D}$
A= es adolescente.
I= se siente incomprendido.

Generalizando se puede decir que la negación de un cuantificador universal (NU) corresponde a la negación de la función, acompañada de un cuantificador existencial.

$$\neg\forall_{\chi}[A(x)] = \exists_{\chi}[\neg(A(x))]$$

La negación de un cuantificador existencial (NE), siguiendo esta misma lógica, quedaría como sigue:

$$\neg\exists_{\chi}[A(x)] = \forall_{\chi}[\neg(A(x))]$$

3.6 Cálculo deductivo

El cálculo deductivo, básicamente, consiste en deducir una conclusión a partir de las premisas dadas o establecidas, usando para ello las reglas de inferencia o de equivalencia conocidas en la lógica. En el caso de la lógica de primer orden es necesario eliminar los cuantificadores para poder aplicar las reglas y, posteriormente si es necesario, volverlos a incluir; para ello, existen algunas reglas conocidas como reglas de los cuantificadores que se muestran a continuación.

3.6.1 Reglas de los cuantificadores

3.6.1.1. Particularización del universal

Cuando algo es válido para todos los elementos del dominio (o sea que hace uso de un cuantificador universal) es posible particularizarlo; es decir, nombrar un elemento particular del dominio.

Ejemplo 1: Particularización del universal.

$\forall\chi\ [D(x)]$

Donde:

$\mathcal{D}$=Números pares.
$x \in \mathcal{D}$
D: es divisible entre dos (se entiende por divisible cuando el resultado de la división es un número entero).

2 es un número par, luego $2 \in \mathcal{D}$ y es un caso particular, por lo tanto: [D(2)].

Como se observa, en este caso se ha quitado el cuantificador universal y la variable x se ha sustituido por un caso específico.

La regla de la particularización del universal indica que:

$\forall_\chi\ [P(x)]$

$\therefore$ P(d) donde $d \in \mathcal{D}$ y es un caso particular.

3.6.1.2 Generalización del universal

Cuando una afirmación proviene de un cuantificador universal y se ha particularizado es posible regresar al cuantificador universal. A esta regla se le conoce como la generalización del universal. **Para hacer uso de esta regla, es muy importante tener la certeza de que la afirmación original proviene de un cuantificador universal**. De otra forma esta regla no se puede aplicar.

Ejemplo 1: Generalización del universal.

4 es divisible entre dos. 4 pertenece al dominio ($\mathcal{D}$)de los números pares y sabemos que todos los números pares son divisibles entre dos. Por lo tanto, a partir de este caso particular se puede generalizar.

La regla de la generalización del particular es la siguiente:

P (d) donde $d \in \mathcal{D}$ y es un caso particular

$\therefore\ \forall_\chi\ [P(x)]$

Advertencia: Aplicarla siempre que se tenga la certeza de que la afirmación proviene de una universalización.

3.6.1.3 Particularización del universal

Cuando algo es válido para algunos elementos del dominio (o sea que hace uso de un cuantificador existencial) es posible particularizarlo; es decir, nombrar un elemento particular del dominio que cumpla con la regla descrita. **Es muy importante asegurarse de que el elemento específico que se está indicando como caso particular cumpla con la regla**.

Ejemplo 1: Particularización del universal.

$\exists_{\chi}$ [D(x)]

Donde:

$\mathcal{D}$=Números pares.
x $\in \mathcal{D}$
D: es divisible entre 8.

2 es un número par, luego 2 $\in \mathcal{D}$, pero dos no es divisible entre 8, entonces 2 no es un caso particular de la afirmación dada.

Se elige entonces al 16, luego 16 $\in \mathcal{D}$ y cumple con la condición de ser divisible entre 8, por lo tanto 16 puede ser un caso particular de la afirmación.

La regla de la particularización de un existencial es la siguiente:

$\exists_{\chi}$ [P(x)]

$\therefore$ P (d) donde d $\in \mathcal{D}$ y es un caso particular de la función descrita

3.6.1.4 Generalización del existencial.

Cuando tienes un caso específico que cumpla con una función, puedes hacer uso de un existencial que te indique que al menos existe un caso que cumple con esa función en específico.

Ejemplo 1: Generalización del existencial.

[D(2)]

Donde:

$\mathcal{D}$=Números pares.
2 $\in \mathcal{D}$
D: es divisible entre dos (se entiende como divisible cuando el resultado de la división es un número entero).

x es un número par, luego $x \in \mathcal{D}$ y es una función válida decir que: [D(x)].

Como se observa en este caso, se puede afirmar la existencia de un determinado x, tal que $x \in \mathcal{D}$.

La regla de la existencialización del particular indica que:

$$\frac{[P(d)]}{\therefore \exists_\chi P(x) \text{ donde } d \in \mathcal{D}}$$

3.6.1.5 Equivalencias de cuantificadores

Al igual que en la lógica proposicional, los cuantificadores tienen ciertas reglas de equivalencia. A continuación se muestran las más utilizadas:

E1) $Q_\chi[A(x)] \vee B(y) \equiv Q_\chi[A(x) \vee B(y)]$
E2) $Q_\chi[A(x)] \wedge B(y) \equiv Q_\chi[A(x) \wedge B(y)]$
E3) $Q_\chi[A(x)] \vee Q_z[B(z)] \equiv Q_\chi Q_z[A(x) \vee B(z)]$
E4) $\forall_\chi[A(x)] \wedge \forall_\chi[C(x)] \equiv \forall_\chi[A(x) \wedge C(x)]$
E5) $\forall_\chi[A(x)] \vee \forall_\chi[C(x)] \equiv \forall_\chi[A(x) \vee C(x)]$
E6) $\exists_\chi[A(x)] \wedge \exists_\chi[C(x)] \equiv \exists_\chi[A(x) \wedge C(x)]$
E7) $\exists_\chi[A(x)] \vee \exists_\chi[C(x)] \equiv \exists_\chi[A(x) \vee C(x)]$
Donde $Q \equiv \forall$ ó $\exists$

3.6.2 Cálculo deductivo en lógica de predicados

En lógica de predicados, al igual que en la lógica proposicional, las reglas de los cuantificadores, las reglas de inferencia y de equivalencia lógica, sirven para deducir formalmente una conclusión a partir de una serie de premisas.

El primer paso es simbolizar las proposiciones tal y como se explica en el apartado 3.4 de este libro; el siguiente paso consiste en eliminar los cuantificadores de la función (utilizando las reglas de los cuantificadores); posteriormente, aplicar las reglas de equivalencia o de inferencia conocidas y, finalmente, incluir los cuantificadores necesarios para llegar a la conclusión (utilizando las reglas de los cuantificadores).

Ejemplo 1: Cálculo deductivo.[5]

Se tienen las siguientes hipótesis:

[5] Ejercicio basado en el libro Matemáticas discretas de Richard Johnsonsbaugh (2005: 46).

1) Todos aman a Microsoft o a Apple.
2) Lina no ama a Microsoft.

$\therefore$ Lina ama a Apple

Primer paso: Simbolizar las hipótesis y la conclusión.

1) $\forall_\chi[M(\mathrm{x}) \vee A(\mathrm{x})]$
2) $[\neg M(j)]$ / $\therefore A(j)$

Donde:

$\mathcal{D}$=Personas
$\mathrm{x} \in \mathcal{D}$
j: Lina $\in \mathcal{D}$
M: Ama a Microsoft.
A: Ama a Apple.

Segundo paso: Eliminar los cuantificadores de la función.

1) $\forall_\chi[M(\mathrm{x}) \vee A(\mathrm{x})]$
2) $[\neg M(\mathrm{j})$ / $\therefore A(\mathrm{j})$
3) $M(\mathrm{j}) \vee A(\mathrm{j})$ Particularización del universal, 1 (x$\leftarrow$ j) [Esto significa que ocupaste la regla de particularización del universal para la premisa 1 y que particularizaste a la variable x como j].

Tercer paso: aplicar las reglas de inferencia o equivalencia.

1) $\forall_\chi[M(\mathrm{x}) \vee A(\mathrm{x})]$
2) $[\neg M(\mathrm{j})]$ / $\therefore A(\mathrm{j})$
3) $M(\mathrm{j}) \vee A(\mathrm{j})$ Particularización del universal, 1 (x $\leftarrow$ j)
4) $A(\mathrm{j})$ TP, 3,4

Ejemplo 2: Cálculo deductivo.

1) $\forall_\chi[P(\mathrm{x}) \rightarrow Q(\mathrm{x})]$
2) $\forall_\chi[R(\mathrm{x}) \rightarrow Q(\mathrm{x})]$
3) $\forall_\chi[P(\mathrm{x}) \vee R(\mathrm{x})]$ / $\therefore \forall_\chi[Q(\mathrm{x})]$
4) $[P(a) \rightarrow Q(a)]$ Particularización del universal, 1 (x $\leftarrow a$)
5) $[R(a) \rightarrow Q(a)]$ Particularización del universal, 1 (x $\leftarrow a$)
6) $[P(a) \vee R(a)]$ Particularización del universal, 1 (x $\leftarrow a$)

7) $[Q(a) \vee Q(a)]$ Ley del silogismo disyuntivo 4,5,6
8) $\forall_\chi[Q\ (x]$ Generalización del particular 7

3.6.3 Formas normales prenex

En lógica de predicados existe algo conocido como forma normal prenexa o prenex, que consiste básicamente en colocar a los cuantificadores al inicio de la fórmula.

$[Q_1 (x_1)] \dots (Q_n (x_n))]\ M$

a) ***Forma normal prenexa***: β es una forma normal prenexa si y solo si $\beta \equiv [(Q_1(x_1) \dots (Q_n(x_n))]\ M$, donde $x_1, \dots, x_n$ son variables diferentes y $Q \equiv \forall$ ó $Q \equiv \exists$ y M es una fórmula que no contiene cuantificadores. Al componente $[(Q_1(x_1)) \dots (Q_n(x_n))]$ se le llama prefijo y a M se le llama fórmula matriz de β.

Dos conceptos más son importantes conocer en este punto:

a) **Variable libre**: es la variable no ligada a un cuantificador.
b) **Variable ligada**: es la variable ligada al cuantificador.

Ejemplos

a) Transformar la fórmula $Q \equiv \forall_x[P(x)] \rightarrow \exists_x[Q(x)]$ a su forma prenex.

1) $\forall_x[P(x)] \rightarrow \exists_x[Q(x)]$
2) Quitar "→" y convertirla en "∨" con la regla de equivalencia (RE1) enunciada en la página 52, de este libro, que se nombra como:
   E1: $\neg\forall_x[P(x)] \vee \exists_x[Q(x)]$, RE1, 1
3) Quitar la negación al inicio de la fórmula ($\neg\forall_x$), utilizando la regla de negación del universal (NU) , mencionada en la página 70 de este libro.
   $\exists_x[\neg P(x)] \vee \exists_x[Q(x)]$, NU, 2
4) Escribir ambos existenciales al inicio de la fórmula, por la regla de equivalencia E7 mencionada en la página 74 de este libro:

$$\exists_x [\neg P(x) \vee Q(x)]$$

Esta última ya es una forma prenexa.

b) Transformar la fórmula $Q \equiv \forall_x[R(x)] \rightarrow \forall_y[S(x,y)]$

1) $\forall_x[R(x)] \rightarrow \forall_y [S(x,y)]$
2) $\neg\forall_x[R(x)] \vee \forall_y [S(x,y)]$ R1, 1
3) $\exists_x[\neg R(x)] \vee \forall_y [S(x,y)]$ NU, 2

Nota: En la expresión $\forall_y[S(x,y)]$, "y" es la variable ligada y "x" es una variable libre, para no confundirla y dejarla fuera del alcance del primer cuantificador; a esa "x" la nombro "z", lo cual se puede hacer porque es una variable libre del cuantificador que afecta a esta fórmula, en este caso $\forall_y$.

4) $\exists_x[\neg R(x)] \vee \forall_y[S(z,y)]$
5) $\forall_y\exists_x[\neg R(x)] \vee S(z,y)]$ E3, 4
   Esta última ya es una forma prenexa.

Ejercicios

Transformar a prenexa las siguientes fórmulas:

a) $\forall_x[P(x)] \rightarrow \exists_y[Q(x,y)]$
b) $\exists_x[\neg\exists_y[P(x,y)] \rightarrow \exists_z[(Q(z) \rightarrow R(x)]]$
c) $\forall_x\forall_y\ [\exists_z[P(x, y, z)] \wedge [\exists_u[Q(x, u) \rightarrow \exists_v[Q(y, v)]]$

4
Técnicas de demostración de teoremas o métodos de prueba

Dentro de la informática existe un área de estudio conocida como programación lógica, la cual surge por las investigaciones realizadas en el área de demostración automática de teoremas, especialmente durante la primera década de 1960 (Irazo, 2007).

El razonamiento automático es un campo de la informática y, más concretamente, de la inteligencia artificial que se encarga de estudiar cómo implantar en una computadora programas que permitan verificar argumentos mediante el encadenamiento de pasos de inferencia (deducción automática). Cuando el trabajo se centra en la obtención de algoritmos que permiten encontrar pruebas de teoremas matemáticos recibe el nombre de demostración automática de teoremas (Irazo, 2007).

Un teorema es un resultado deducible de un sistema formal, regularmente enunciado de la forma siguiente: si H entonces T, donde H representa una serie de afirmaciones conocidas como hipótesis o supuestos y T una afirmación conocida como tesis o conclusión, que tiene que demostrarse a partir de la(s) hipótesis.

Para ello, en este libro en particular se presentan cuatro técnicas de demostración:

4.1 Demostración directa

A partir de la hipótesis hay una serie de consecuencias lógicas secundarias que llevan a probar T.

$H \rightarrow T$
P_0: H
P_1: $H \rightarrow q_1$
P_2: $q1 \rightarrow q_2$
$\vdots$
P_n: $q_{n-1} \rightarrow q_n$
P_{n+1}: $q_n \rightarrow T$

Ejemplo 1: Demostración directa.

Demostrar que la suma de dos enteros pares es par.

- Lo primero a realizar es identificar en el teorema qué es H y qué es T, y colocar el teorema de la forma H→T, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:
H: Dos números enteros pares, digamos m y n.
T: La suma de m+n es también un número par.

- Lo segundo a ejecutar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:
El concepto clave que aparece es PAR.
La definición matemática de un número par es la siguiente:
m es un entero par si y solo si existe un entero "a", tal que m=2a.

Con estos elementos se realiza una serie de deducciones que eventualmente nos llevarán a T.

P_0: H: Sea m y n dos enteros pares, tales que m=2a y n=2b, donde a y b son dos números enteros (hasta aquí solo se ha definido H, apoyados en el concepto de número par).
P_1: ($H \rightarrow q_1$): Si m=2a y n=2b, donde a y b son dos números enteros, entonces m+n=2a+2b, donde a y b son enteros.
P_2: ($q_1 \rightarrow q_2$): Si m+n= 2a+2b, entonces m+n=2(a+b), donde a y b son enteros.
P_3: ($q_2 \rightarrow q_3$): Si m+n= 2(a+b), entonces m+n=2c, donde c es un entero, ya que la suma de dos enteros es otro número entero.
P_4: ($q_3 \rightarrow T$): Si m+n=2c, donde c es un entero, entonces m+n es un número par, debido a que se apega a la definición de un número par.

Las demostraciones matemáticas no tienen una forma específica de escribirse, cada uno es libre de redactar la demostración como mejor le parezca, siempre que se respete la secuencia lógica H, $H \rightarrow q_1$, $q_1 \rightarrow q_2$,…, q_n-1$\rightarrow q_n$,$q_n \rightarrow T$.

En este caso, una forma de redactar esta demostración sería:

Sean m y n dos enteros pares, tales que m=2a y n=2b, donde a y b son dos números enteros, entonces m+n=2a+2b= 2(a+b)= 2c, donde a,b,c son enteros, de manera que m+n es un número par.

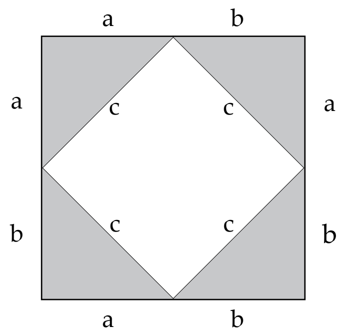
Ejemplo 2: Demostración directa.

Demostrar el teorema de Pitágoras que señala: en un triángulo rectángulo (ABC) el cuadrado del cateto más el cuadrado del cateto b es igual a la hipotenusa c al cuadrado, i.e. $a^2 + b^2 = c^2$

H: Un triángulo rectángulo con lados a y b e hipotenusa c.
T: $a^2 + b^2 = c^2$

P_0: H: Sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa.
P_1: ($H \rightarrow q_1$): Si tenemos un triángulo rectángulo con catetos a y b e hipotenusa c, entonces la unión de cuatro triángulos rectángulos formará un cuadrado externo (X) con lados a+b y un cuadrado interno (Y) con lados igual a c, como se muestra en la figura 1.

Figura 1. Unión de cuatro triángulos rectángulos



P_2: ($q_1 \rightarrow q_2$): Si la unión de cuatro triángulos rectángulos formara un cuadrado externo (X) con lados a+b y un cuadrado interno (Y) con lados igual a c, como se muestra en la figura 1, entonces el área del cuadrado externo X será: $(a+b)^2$ (recordar que el área de un cuadrado es lado al cuadrado) y el área del triángulo interno Y, será: c^2.
P_3: ($q_2 \rightarrow q_3$): Si el área del cuadrado externo X es: $(a+b)^2$ y el área del cuadrado interno Y es c^2, entonces el área del cuadrado externo se puede escribir como la suma del área del cuadrado interno Y y las áreas de los cuatro triángulos rectángulos. De manera que $(a + b)^2 = c^2 + 4\,\frac{(a)(b)}{2}$ (recordar que el área de un triángulo es base por altura sobre dos).

P_4: ($q_3 \rightarrow q_4$): Si $(a + b)^2 = c^2 + 4\,\frac{(a)(b)}{2}$, entonces $a^2 + 2\,(a)\,(b) + b^2 = c^2 + 2\,(a)\,(b)$ (reglas de álgebra al desarrollar el binomio al cuadrado y dividir 4/2).
P_5: ($q_4 \rightarrow q_5$): Si $a^2 + 2\,(a)\,(b) + b^2 = c^2 + 2\,(a)\,(b)$, entonces $a^2 + 2\,(a)(b) + b^2 - 2\,(a)(b) = c^2$
P_6: ($q_5 \rightarrow T$): Si $a^2 + 2\,(a)(b) + b^2 - 2\,(a)(b) = c^2$, entonces $a^2 + b^2 = c^2$

Una posible forma de escribir la demostración de este teorema sería:

Sean a y b los catetos de un triángulo rectángulo y c la hipotenusa de éste. La unión de cuatro triángulos rectángulos formará un cuadrado externo (X) con lados a+b y un cuadrado interno (Y) con lados igual a c, como se muestra en la figura 1, entonces el área del cuadrado externo X será $(a+b)^2$ y el área del triángulo interno Y, será c^2. De manera que $(a + b)^2 = c^2 + 4\,\frac{(a)(b)}{2}$, entonces $a^2 + 2\,(a)(b) + b^2 = c^2 + 2\,(a)(b)$. Por lo tanto, $a^2 + b^2 = c^2$

Ejemplo 3: Demostración directa bicondicional.

Demostrar que un número es par, si y solo si su cuadrado es par.

Nota importante: El enunciado está en términos de una bicondicional, es decir, que corre en ambos sentidos; cuando sucede esto, la demostración tiene que ir en ambos sentidos, primero demostrando que **si tenemos un número par, entonces su cuadrado será un número par** y después demostrando que **si el cuadrado de un número es par, entonces el número es par**.

Iniciamos la primera parte de la demostración:

1. Demostrar que si tenemos un número par, entonces su cuadrado es par.

- Lo primero a realizar es identificar en el teorema qué es H y qué es T, y colocar el teorema de la forma H→T, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:
H: un número par, digamos n.
T: n^2 es par.

- Lo segundo a ejecutar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:

El concepto clave que aparece es PAR.

La definición matemática de un número par es la siguiente: m es un entero par si y solo si existe un entero "a", tal que m=2a.

P_0: H: Sea n=2a, donde a es un entero.
P_1: ($H \to q_1$): Si n=2a, donde a es un entero, entonces $n^2 = (2a)(2a)$, donde a es un entero.
P_2: ($q_1 \to q_2$): Si $n^2= (2a)(2a)$, entonces $n^2=2(2a^2)$, donde $2a^2 = c$ y c es un entero.
P_3: ($q_2 \to T$): Si $n^2=2c$ donde c es un entero, entonces n^2 es par.

2. Demostrar que si el cuadrado de un número es par, entonces el número es par.

- Lo primero a realizar es identificar en el teorema qué es H y qué es T, y colocar el teorema de la forma H→T, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:

H: el cuadrado de un número es par, digamos n^2 es par.
T: n es par.

- Lo segundo a ejecutar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:

El concepto clave que aparece es PAR.
La definición matemática de un número par es la siguiente: m es un entero par si y solo si existe un entero "a", tal que n=2a.

P_0: H: Sea $n^2=2a$, donde a es un entero.
P_1: ($H \to q_1$): Si $n^2=2a$, donde a es un entero, entonces $n^2=2(2b^2)$, donde b es un entero.
P_2: ($q_1 \to q_2$): Si $n^2 =2(2b^2)$, donde b es un entero, entonces (n)(n)=(2b)(2b), donde b es un entero.
P_3: ($q_2 \to q_3$): Si (n)(n)=(2b)(2b), donde b es un entero, entonces n=2b, donde b es un entero.
P_4: ($q_2 \to T$): Si n=2b, donde b es un entero, entonces n es un par.

En este caso, una forma de redactar esta demostración sería:

Sea $n=2a$, donde a es un entero, $n^2=(2a)(2a)= 2(2a^2)$, donde $2a^2=c$ y c es un entero, por lo tanto, n^2 es par.

Sea n^2 un número par, o sea $n^2=2(2b^2)$, donde b es un entero, entonces $(n)(n)=(2b)(2b)$, donde b es un entero, de manera que $n=2b$, por lo tanto, n es par.

4.2 Demostración por contraposición

La contraposición es una demostración indirecta, es decir, que ante la imposibilidad de probar $H \rightarrow T$ por demostración directa, lo que prueba es que $(\neg T \rightarrow \neg H)$ es una equivalencia y entonces se prueba $(\neg T \rightarrow \neg H)$ por demostración directa.

$\neg T \rightarrow \neg H$
P_0: $\neg T$
P_1: $\neg T \rightarrow q_1$
P_2: $q_1 \rightarrow q_2$
$\vdots$
P_n: $q_{n-1} \rightarrow q_n$
P_{n+1}: $q_n \rightarrow \neg H$

Ejemplo 1: Demostración por contraposición.

Demostrar que si el producto de dos enteros es par, entonces por lo menos uno de ellos es par.

- Lo primero a realizar es identificar en el teorema qué es H y qué es T, y colocar el teorema de la forma $H \rightarrow T$, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:

H: El producto (m)(n) es par.
T: Por lo menos un entero m **o** n es par.

- Lo segundo a ejecutar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:

El concepto clave que aparece es PAR.
La definición matemática de un número par es la siguiente: "m" es un entero par si y solo si existe un entero "a", tal que $m=2a$.

- La demostración inicia con la negación de la tesis $\neg T$

En este caso:

Ninguno de los enteros m **y** n es par (recordar la equivalencia de De Morgan: $\neg(P \vee Q) \equiv \neg P \wedge \neg Q$).

- Entonces, se hace uso de la definición matemática de un número entero que **no** es par, o sea que es impar. La definición matemática de un número impar es la siguiente: m es un entero impar si y solo si existe un entero a, tal que $m=2a+1$.

Nota: Es importante tener claridad que lo que se quiere probar es $\neg H$ es decir, que el producto de (m)(n) no es par, lo que significa que es impar.

Ahora, con estos elementos, se hace una serie de deducciones que eventualmente llevarán a $\neg H$.

P_0: $\neg T$: Sean $m=2a+1$ y $n=2b+1$, donde a y b son números enteros (hasta aquí solo se ha definido $\neg T$, apoyados en el concepto de número impar).
P_1: $(\neg T \rightarrow q_1)$: Si $m=2a+1$ y $n=2b+1$, entonces $(m)(n)=(2a+1)(2b+1)$ donde a y b son enteros.
P_2: $(q_1 \rightarrow q_2)$: Si $(m)(n)=(2a+1)(2b+1)$, entonces $(m)(n)=(2a)(2b)+2a+2b+1$, donde a y b son enteros.
P_3: $(q_2 \rightarrow q_3)$: Si $(m)(n)=(2a)(2b)+2a+2b+1$, entonces $(m)(n)=2[2(a)(b)+a+b]+1$, a y b son enteros.
P_4: $(q_3 \rightarrow q_4)$: Si $(m)(n)=2[2(a)(b)+a+b]+1$, entonces $(m)(n)=2c+1$, donde c es un número entero, ya que $2(a)(b)+a+b$, es un número entero al que se nombra como c.
P_5: $(q_4 \rightarrow \neg H)$: Si $(m)(n)=2c+1$, entonces (m)(n) es un número impar $(q_5 \rightarrow \neg H)$.

Nuevamente, se les recuerda que las demostraciones matemáticas no tienen una forma específica de escribirse, cada uno es libre de redactar la demostración como mejor le parezca, siempre que se respete la secuencia lógica de la demostración por contraposición

$\neg T, \neg T \rightarrow q_1, q_1 \rightarrow q_2, \ldots, q_{n-1} \rightarrow q_n, q_n \rightarrow \neg H$.

En este caso, una forma de redactar esta demostración sería:

Sean m y n dos enteros impares, tales que $m=2a+1$ y $n=2b+1$, donde a y b son dos números enteros, entonces $(m)(n)=(2a+1)(2b+1)=(2a)(2b)+2a+2b+1=2[2(a)(b)+a+b]+1=2c+1$, donde a,b,c son enteros, de manera que (m)(n) es un número impar, con lo que por contraposición se prueba que si el producto de dos enteros es par, por lo menos uno de ellos es par.

Ejemplo 2: Demostración por contraposición.

Demostrar que el cuadrado de un número impar es un impar.

- Lo primero a realizar es identificar en el teorema qué es H y qué es T, y colocar el teorema de la forma H→T, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:
H: Un número entero impar, n.
T: n^2 es un número impar.

- Lo segundo a ejecutar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:
El concepto clave que aparece es IMPAR.
La definición matemática de un número impar es la siguiente: n es un entero impar si y solo si existe un entero "a", tal que n=2a+1.

Con estos elementos, a partir de ¬T queremos llegar a demostrar ¬H.

P_0: ¬T: n^2 =2a, donde a es un entero (recordar que es la negación de T).
P_1: ($\neg T \rightarrow q_1$): Si $n^2 = 2(2b^2)$, donde b es un entero, entonces $(n)(n)=(2b)^2$.
P_2: ($q_1 \rightarrow q_2$): Si $(n)(n)=(2b)^2$, entonces (n)(n)=(2b)(2b), donde b es un entero.
P_3: ($q_2 \rightarrow q_3$): Si (n)(n)=(2b)(2b), donde b es un entero, entonces n=2b.
P_4: ($q_3 \rightarrow \neg H$): Si n=2b, donde b es un entero entonces n es un número par.

En este caso, una forma de redactar la demostración sería:
Sea $n^2=2a$, donde a es un entero entonces $(n)(n)= 2(2b^2)=(2b)^2=(2b)(2b)$, donde b es un entero, de manera que n=2b, por lo que n es par, así por contraposición se prueba que el cuadrado de un número impar es un impar.

Ejemplo 3: Demostración por contraposición.

Demuestre que si n es un entero y 3n+2 es un número impar, entonces n es impar.

- Lo primero a realizar es identificar en el teorema qué es H y qué es T, y colocar el teorema de la forma H→T, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:
H: 3n+2 es un impar, donde n es un entero.
T: n es un número impar.

- Lo segundo a ejecutar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:
El concepto clave que aparece es IMPAR.
La definición matemática de un número impar es la siguiente: n es un entero impar si y solo si existe un entero "a", tal que n=2a+1.

Con estos elementos, a partir de ¬T, queremos llegar a demostrar ¬H.

P_0: ¬T: n=2a, donde a es entero.
P_1: $(\neg T \rightarrow q_1)$: Si n=2a, donde a es entero, entonces 3n+2=3(2a)+2.
P_2: $(q_1 \rightarrow q_2)$: Si 3n+2=3(2a)+2, entonces 3n+2=2(3a+1), donde 3a+1 es un entero.
P_3: $(q_2 \rightarrow \neg H)$: Si 3n+2=2(3a+1), donde 3a+1 es un entero, entonces 3n+2 es un número par.

Sea n=2a, donde a es un entero, entonces 3n+2=3(2a)+2=3(2a)+2=2(3a+1)=2c, donde c es un entero, por lo que 3n+2 es un número par. Por contraposición se demuestra que si n es un entero y 3n+2 es un número impar, entonces n es impar.

4.3 Demostración por reducción al absurdo

La demostración por reducción al absurdo es una demostración indirecta, donde en lugar de probar H→T, lo que se prueba es ¬(H→T) a través de la equivalencia (H∧¬T). A partir de esta equivalencia se busca llegar a una contradicción (R∧¬R), y si se llega a una contradicción, entonces se habrá probado que ¬(H→T) es falsa y, por lo tanto, H→T es verdadera.

Así que en términos de lógica proposicional hay dos pasos en esta demostración:

1) $\neg(H\rightarrow T) \equiv (H\wedge\neg T)$
2) $[(H\wedge\neg T) \rightarrow (R\wedge \neg R)] \rightarrow H \rightarrow T$

$\neg\ (H\rightarrow T)$
$P_0: (H\wedge\neg T)$
$P_1: (H\wedge\neg T)\rightarrow q_1$
$P_2: q_1\rightarrow R$
$\vdots$
$P_n: (R\wedge \neg R)$ (Contradicción)
$P_{n+1}: H\rightarrow T$

Ejemplo 1: Reducción al absurdo.

Demostrar que la suma de un número racional con un número irracional es un irracional.

- Lo primero que hay que hacer es identificar en el teorema qué es H y qué es T, o sea, colocar el teorema de la forma H→T, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:
H: Si m es un número racional y n un número irracional.
T: m+n es un número irracional.

- Lo segundo a realizar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:
El concepto clave que aparece es número RACIONAL E IRRACIONAL.

- La definición matemática de un número racional es la siguiente: Todo número que puede escribirse como una fracción p/q, donde p y q son números enteros y $q\neq 0$.
- La definición de un número irracional es: Todo número que no puede escribirse como una fracción p/q, donde p y q son números enteros y $q\neq 0$. Es cualquier número real que no es racional.

Ahora, con estos elementos empezamos con $\neg(H\rightarrow T) \equiv (H\wedge\neg T)$

$\neg(H\rightarrow T)$
P_0: $(H\wedge\neg T)$: m= p/q, donde p y q son enteros con $q\neq 0$, n un número irracional y m+n=r/s, donde r y s son enteros con $s\neq 0$.
P_1: $(H\wedge\neg T)\rightarrow q_1$: Si m= p/q, donde p y q son enteros con $q\neq 0$, y n un número irracional y m+n=r/s, donde r y s son enteros con $s\neq 0$, entonces n=(r/s)-(p/q).

P_2: $q_1 \rightarrow q_2$: Si n=(r/s)-(p/q), entonces n= $\frac{ps-rq}{qs}$donde p, q, r y s son enteros y q≠0 y s≠0.
P_3: $q_1 \rightarrow R$: Si n= $\frac{ps-rq}{qs}$ donde p, q, r y s son enteros y q≠0 y s≠0, entonces n es racional.
P_4: $(R\wedge\neg R)$ Pero en P_0, se define a n como un número irracional y en P_2, n es racional. (esta es la contradicción).
P_5: Esta contradicción demuestra que $\neg(H\rightarrow T)$, es falsa y por lo tanto $H\rightarrow T$ resulta verdadera.

En este caso, una forma de redactar esta demostración sería:
Sea m= p/q, donde p y q son enteros con q≠0, y n un número irracional y m+n=r/s, donde r y s son enteros con s≠0, entonces n=(r/s)-(p/q)= $\frac{ps-rq}{qs}$, donde p, q, r y s son enteros y q≠0 y s≠0, o sea, que n es irracional y racional a la vez, por reducción al absurdo se prueba que la suma de un número racional con un número irracional es un irracional.

Ejemplo 2: Reducción al absurdo.

Demostrar que la suma de dos enteros pares es un número par

- Lo primero que hay que hacer es identificar en el teorema qué es H y qué es T, y colocar el teorema de la forma $H\rightarrow T$, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:
H: Dos números enteros pares, digamos m y n.
T: La suma de m+n es también un número par.

- Lo segundo a realizar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:
El concepto clave que aparece es PAR.
La definición matemática de un número par es la siguiente: m es un entero par si y solo si existe un entero "a", tal que m=2a.

Ahora, con estos elementos empezamos con $\neg (H\rightarrow T) \equiv (H\wedge\neg T)$

$\neg (H\rightarrow T)$
P_0: $(H\wedge\neg T)$: m=2a, n=2b y m+n=2c+1, donde a, b y c son enteros.

P_1: $(H \wedge \neg T) \rightarrow q_1$: Si m=2a, n=2b y m+n=2c+1, donde a, b y c son enteros, entonces m+n=2a+2b.
P_2: $q_1 \rightarrow q_2$: Si m+n=2a+2b, entonces m+n=2(a+b), donde a y b son enteros.
P_3: $q_1 \rightarrow R$: Si m+n=2(a+b), donde a y b son enteros, entonces m+n es par.
P_4: $(R \wedge \neg R)$: Pero en P_0, se define a m+n como impar, entonces m+n es par e impar a la vez (esta es la contradicción).
P_5: Esta contradicción demuestra que $\neg(H \rightarrow T)$ es falsa y, por lo tanto, $H \rightarrow T$ resulta verdadera.

En este caso, una forma de redactar esta demostración sería:

Sean m=2a y n=2b y m+n=2c+1, donde a, b y c son enteros, entonces m+n=2a+2b=2(a+b)=2c, donde c es un entero, de manera que m+n es par e impar a la vez, por lo tanto, por reducción al absurdo se prueba que la suma de dos enteros pares es un número par.

Ejemplo 3. Reducción al absurdo.

Demostrar que si m y n son enteros tales que $n+n^2+n^3=m+m^2$, entonces n es par.

- Lo primero a realizar es identificar en el teorema qué es H y qué es T, o sea, colocar el teorema de la forma $H \rightarrow T$, tal cual se ha hecho en la simbolización de proposiciones.

En este caso:

H: m y n son enteros tales que $n+n^2+n^3=m+m^2$.
T: n es par.

- Lo segundo a ejecutar es identificar el (los) concepto(s) "clave" con el (los) cual(es) se va a trabajar el teorema, y consultar la definición matemática de dicho(s) concepto(s).

En este caso:

El concepto clave que aparece es PAR.
La definición matemática de un número par es la siguiente: m es un entero par si y solo si existe un entero "a", tal que m=2a.

$\neg(H \rightarrow T)$
P_0: $(H \wedge \neg T)$: m y n son enteros tales que $n+n^2+n^3=m+m^2$ y n=2a+1, donde a es un entero.
P_1: $(H \wedge \neg T) \rightarrow q_1$: Si m y n son enteros tales que $n+n^2+n^3=m+m^2$ y n=2a+1,

donde a es un entero entonces $n+n^2+n^3 =(2a+1)+(2a+1)^2+(2a+1)^3$.
P_2: $q_1 \rightarrow q_2$: Si $n+n^2+n^3 = (2a+1)+(2a+1)^2+(2a+1)^3$, entonces $n+n^2+n^3=2a+1+(2a)^2+2(2a)(1)+1^2+(2a)^3+3(2a)^2(1)+3(2a(1)^2+1^3=2a+1+4a^2+4a+1+8a^3+ 12a^2+6a+1$.
P_3: $q_2 \rightarrow q_3$: $n+n^2+n^3=2a+1+4a^2+4a+1+8a^3+12a^2+6a+1=8a^3+16a^2+10a+3$.
P_4: $q_3 \rightarrow q_4$:Si $n+n^2+n^3= 8a^3+16a^2+10a+3=2(4a^3+8a^2+5a+1)+1$, donde $4a^3+8a^2+5a+1$ es un entero, entonces $n+n^2+n^3$ es un número impar.
P_5: $q_4 \rightarrow R$: Si $n+n^2+n^3$ es un número impar, entonces $m+m^2$ es impar.
P_6: $(R \wedge \neg R)$: Pero $m+m^2$ se puede escribir de la forma (m) (1+m), de tal forma que si m es par, 1+m será impar o viceversa. Si m es par $(m)(1+m)=2b(1+2b)=2b+4b^2=2(b+2b^2)$, donde b es un número entero, luego $m+m^2$ es par. De acuerdo con P_5 $m+m^2$ es impar. (Esta es la contradicción).
P_7: Esta contradicción demuestra que $\neg(H \rightarrow T)$ es falsa y, por lo tanto, $H \rightarrow T$ resulta verdadera.

En este caso, una forma de redactar esta demostración sería:

Sean m y n dos enteros tales que $n+n^2+n^3=m+m^2$, y $n=2a+1$, donde a es un entero, entonces $n+n^2+n^3=8a^3+16a^2+10a+3=2(4a^3+8a^2+5a+1)+1$, donde $4a^3+8a^2+5a+1$ es un entero, entonces $n+n^2+n^3$ es un número impar, por lo que $m+m^2$ es un impar también. Pero $m+m^2$ se puede escribir de la forma (m) (1+m), de tal forma que si m es par, 1+m será impar o viceversa. Si m es par $(m)(1+m)=2b(1+2b)=2b+4b^2=2(b+2b^2)$, donde b es un número entero, luego $m+m^2$ es par, luego $m+m^2$ es par e impar a la vez. Por lo que por reducción al absurdo se prueba que si m y n son enteros tales que $n+n^2+n^3=m+m^2$, entonces n es par.

4.4 Demostración por contraejemplo

La demostración por contraejemplo funciona ofreciendo un ejemplo que no cumpla con la propiedad establecida en el teorema y con eso basta y sobra para decir que el teorema o la afirmación resultan falsas.

Ejemplo 1: Demostración por contraejemplo.

Demostrar en la siguiente afirmación que si A, B y C son conjuntos tales que AUB=AUC, entonces B=C es falsa.

Sean A={1,2,3,4,5,6}, B={2,5,6}, C={1,3,4,5}, entonces AUB={1,2,3,4,5,6} y AUC={1,2,3,4,5,6}, de manera que AUB=AUC, sin embargo, como se observa B≠C, por lo tanto, las afirmaciones A, B y C son conjuntos tales que AUB=AUC, entonces B=C es falsa.

Ejercicios

Demostrar que:

a) El cuadrado de un número impar es un impar.

- DEMOSTRACIÓN DIRECTA: Sea $m=2a+1$, donde a es un entero, entonces $m=(2a+1)(2a+1)=2a^2+2a+1=2(a^2+a)+1=2c+1$, donde c es un entero; por lo tanto, el cuadrado de un número impar es un impar.

b) La suma de dos enteros pares es un número par.

- DEMOSTRACIÓN DIRECTA: Sean $m=2a$ y $n=2b$, donde a y b son enteros, entonces $m+n=2a+2b=2(a+b)=2c$, donde c es un entero, por lo tanto, la suma de dos enteros pares es un número par.
- DEMOSTRACIÓN POR REDUCCIÓN AL ABSURDO: Sean $m=2a$ y $n=2b$ y $m+n=2c+1$, donde a, b y c son enteros, entonces $m+n=2a+2b=2(a+b)=2c$, donde c es un entero, de manera que m+n es par e impar a la vez, por lo tanto, por contradicción se prueba que la suma de dos enteros pares es un número par.

c) Si $x=2n+1$, entonces $x^3=2m+1$, donde n y m son enteros.

- DEMOSTRACIÓN DIRECTA: Sea $x=2n+1$, donde n es un entero, entonces $x^3=(2n+1)^3=8n^3+2n^2+2n+1^3=2[4n^3+n^2+n]+1$, dado que n es un entero, entonces $4n^3+n^2+n$ es un número entero, al que llamamos m; de manera que $x^3=2m+1$, por lo tanto, si $x=2n+1$, entonces $x^3=2m+1$, donde n y m son enteros.

Conclusiones

En este libro se presenta una exposición de conceptos fundamentales de la lógica a fin de que el lector encuentre las posibilidades y las ventajas de su uso y su aplicación en las ciencias computacionales y análogas que requieren de sistemas formales, así como también los elementos de formación en lógica no tan solo en el área de matemáticas, sino además en la de las ciencias computacionales, cuya relación inter y multidisciplinar permitirá la eficiencia y la eficacia en el diseño y la elaboración de programas y sistemas de cómputo indispensables en el ámbito académico y/o campo laboral.

Sin duda alguna, "lo básico debe ser inherente a la formación lógico-matemática, como la abstracción, los lenguajes, las semánticas, los conectores, las interpretaciones, las tautologías, el cálculo proposicional y la lógica computacional" (Serna, 2013: 66). Sin embargo, en niveles superiores, donde son otros los elementos requeridos para la resolución de problemáticas de la realidad académica y laboral, es necesario abordar e incluir aspectos avanzados como la deducción y los métodos formales, la sintaxis, la semántica, o bien resoluciones y lógicas de muchos valores, etcétera (Denning, 2009, citado por Serna, 2013).

Sobre lo anterior, estimado lector, usted podrá incursionar en la lógica matemática básica y sabrá en su momento y de acuerdo a sus necesidades académicas y laborales cuándo y dónde investigar los aspectos avanzados que respondan a la problemática diversa de su cotidianidad.

¡No tema, adéntrese al mundo de la lógica,
y en la medida de que sea consciente de su sentido,
le será mucho más fácil aprender!

Bibliografía

Barceló, Axel A. (2012). Introducción a la Lógica Intencional. Lógica Temporal Proposicional. En http://www.filosoficas.unam.mx/~abarcelo/INTENSIONAL/2012/260312.pdf [Consultado enero de 2015].

Bustamante Arias, Alfonso (2009). *Lógica y argumentación. De los argumentos inductivos a las álgebras de Boole*. Prentice Hall, México.

Copi, Irving (1972). *Introducción a la Lógica*. Eudeba, Buenos Aires.

Del Callejo Canal, Diana D. (2014). *La rebelión de los buscadores. El reconocimiento del otro en la educación*. Dictus Publishing, Alemania.

Julian Irazo, Pascual J. y Alpuente Fraznedo, Maria (2007). *Programación Lógica: Teoría y Práctica*. Prentice Hall, México.

Johnsonsbaugh, Richard (2005). *Matemáticas discretas*. Prentice Hall, México.

Paulson, L. (2002). *Logic and proof.* U. Cambridge, EUA.

Perelman, Chaïm ((2007). Lógica formal y lógica informal, *Praxis Filosófica*. Núm. 25, (jul-dic), pp. 139-144. Universidad del Valle, Colombia. En
http://www.redalyc.org/pdf/2090/209014642009.pdf [Consultado el 12 de enero de 2015].

Serna M., Edgar (2013). La lógica en las ciencias computacionales, *Revista Educación en Ingeniería*. Vol. 8, núm. 15, (ene-jun), pp. 62-68, Colombia. En www.educacioneningenieria.org/index.php/edi/article/download/.../166 [Consultado el 27 de enero de 2015].

Suppes, Patrick y Shirley Hill (2013). *Introducción a la lógica matemática*. Editorial Reverté, México.

Wagensberg, Jorge (2007). *El gozo intelectual*. Tusquets, Barcelona, España.

Siendo rectora de la Universidad Veracruzana
la doctora Sara Ladrón de Guevara,
Lógica: El pensamiento matemático
de Diana Donají Del Callejo-Canal, Enrique Del Callejo-Canal y
Margarita Edith Canal-Martínez
se terminó de imprimir en el mes de agosto de 2016,
en Pastoressa, diseño gráfico, editorial y producción.
Agustín Melgar 1, Unidad Veracruzana, CP 91030,
Xalapa, Ver., fpastoressav@yahoo.com.mx.
El tiraje consta de 200 ejemplares.
Se usaron tipos Palatino, Times New Roman y Symbol.

U.textos universitarios

La lógica es una palabra derivada de *logos* —ideas, razones y argumentos— del vocablo *logike*, utilizado para referir a todo aquello que se relaciona con la razón, el intelecto, el argumento y la dialéctica. Se trata de una ciencia presente en cualquier ámbito de la vida, académica y cotidiana. Como seres humanos invariablemente hacemos uso de la lógica, consciente e inconscientemente razonamos, generamos ideas, planteamos argumentos para explicar hechos y fenómenos de la vida. Hacemos uso tanto de la lógica natural como de la lógica matemática. La primera tiene que ver con la destreza nata para razonar sin apelar a la ciencia; la segunda se caracteriza por emplear un lenguaje simbólico y abstracto de cualquier contenido.

La obra aquí expuesta atiende a la necesidad de introducir al lector al pensamiento lógico-matemático, a través de la lógica proposicional y la lógica de predicados. El texto de manera sencilla y accesible, permite la comprensión desde la parte más llana del pensamiento lógico-matemático hasta la demostración de teoremas.

En este sentido, se muestran ejemplos cotidianos sin perder la rigurosidad matemática, lo que da como resultado que el lector aprenda el uso de símbolos matemáticos de manera natural y asociados a su viviencia diaria, lo cual le otorga una significativa aportación al presente trabajo editorial

La matemática es la ciencia del orden y la medida,
de bellas cadenas de razonamientos,
todos sencillos y fáciles.

Descartes